

OTOMATİK KONTROL

Ders Sorumlusu: Dr. Öğr. Üyesi Osman ACAR

Ders Salonu :B211

Ders Saatleri: N.Ö. için 14.15-16.45 arası İ.Ö. için 19.25-21.50

Vize Sınavı: 15-20 Kasım 2022 (8 haftalık ders) Sınav Yazılı yöntemle yapılır.

Final Sınavı : 03-15 Ocak 2023 (6 haftalık ders)

Bütünleme Sınavı: 24-29 Ocak 2023 (7 günlük aradan sonra)

Notlandırma: Ödevin 100 puan üzerinden değerlendirilmesi yapılır ve bu puanın %30'i alınıp Final ya da Bütünleme sınavı puanının %70'i ile toplanarak Final Sınav notu ya da Bütünleme sınav notu elde edilir.

Devamsızlık : Toplam 4 hafta (16 saat).

Not: Bu sunumda kullanılan resimler Prof. Dr. Yücel Ercan'ın Sistem Dinamiği ve Modellemesi adlı kitabından alınmıştır.

MADDE 10 – (1) Öğrenci derslere ve uygulamalara devam etmek zorundadır. Teorik derslerin %30'undan, uygulamaların %20'sinden fazlasına devam etmeyen veya uygulamalarda başarılı olamayan öğrenci o dersin final sınavına giremez.

ÖDEV SUNUM SIRASI İ.Ö.

1. Hafta Ahmet Furkan Erdoğan LQR
 - 1.Hafta Tunahan bayrakçı Adaptive
 1. Emre ÖZAL PID
 1. İbrahim Samet Tarım Adaptive
 - 2.Zekeriya Şahan İmpedans kontrol
 - 2.Mehmet SANLI PLC
 - 2.Muhammed Karanarin Adaptive
 - 2.Ramazan ACAR PLC
 - 3.Mustafa Değiş Fuzzy
 - 3.Berkant ACAR PID
 3. Muhammed Hacızade Fuzzy
 3. Ömer Fahri Sarı Fuzzy
 - 4.Mehmet Furkan ARSLAN İmpedans
 - 4.Ali Berkut Çetinkaya İmpedans
 - 4.Mehmet Baysal LQR
 - 4.Elmas Sena Quantum
- Listede ismi olmayanlar 5. sıradan devam eder

Ödev Sunumları N.Ö.

9. Haftalar

Ödev sunum Fuzzy Control **nevzat sefa okudan, Burak Özbay ilk grup**

10. Haftalar

Ödev sunum PID **fatih mete demir ahmet taş pınar yunus emre dursun ikinci grup**

11. Haftalar

Ödev sunum Adaptive Control **İbrahim ethem okutan, mert aydın üçüncü**

12. Haftalar

Ödev sunum PLC **selim girgin dördüncü**

13. Haftalar

Ödev sunum LQR Control **Mehmet CAMCI Remzi ARI beşinci**

14. Haftalar

Impedance **Emre Aslan abdukkadir kılıç musa toker altıncı**

Quantum control **Ahmet Taş Yusuf karınca yiğit emin yetkin altıncı**

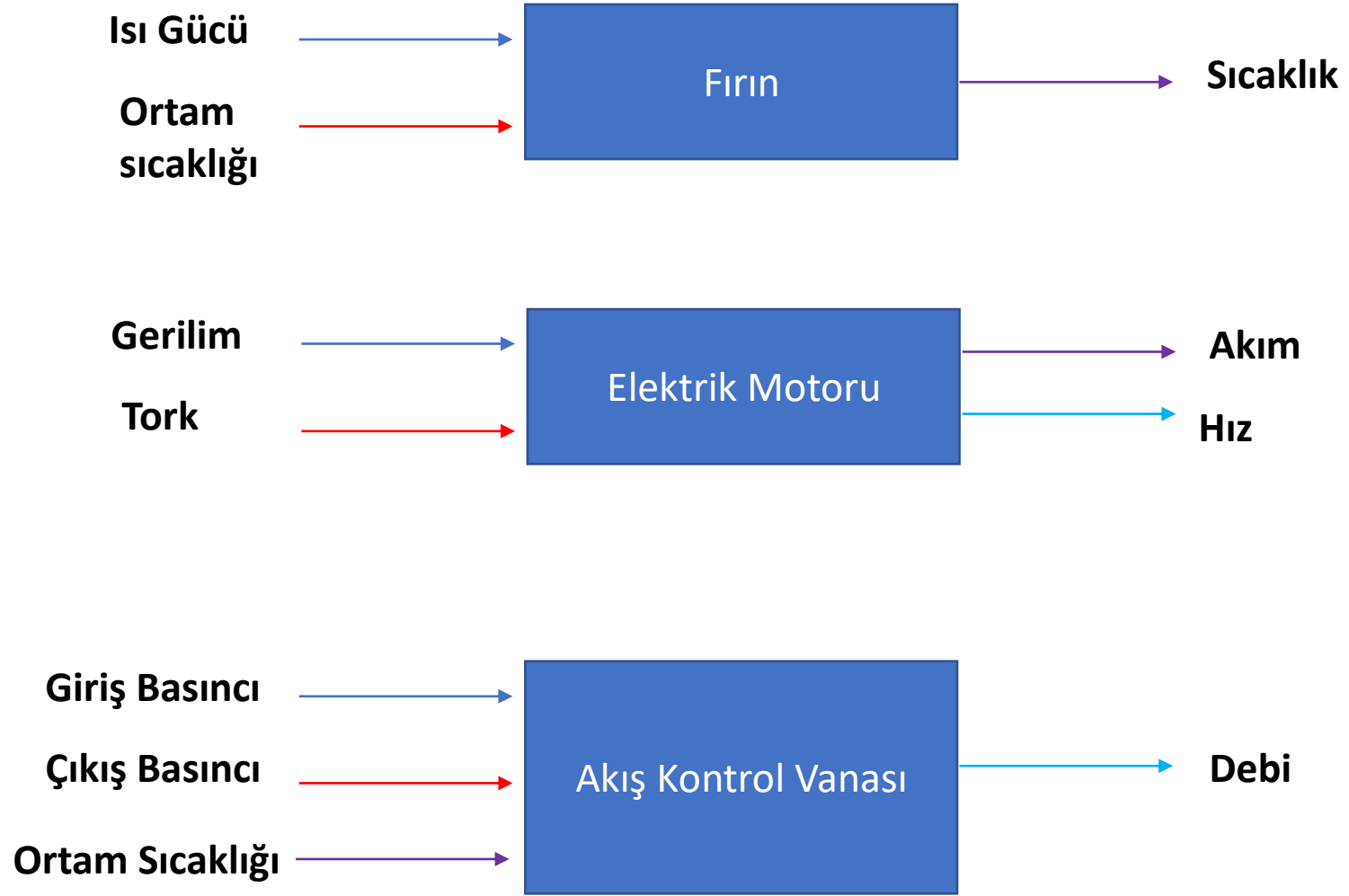
SİSTEM NEDİR?

Birbiriyle ve çevresiyle etkileşim halinde olan bir fonksiyon için bir araya gelmiş elemanlar topluluğudur. Eğer sistemin durumunu tanımlayan parametreler zamanla değişen bir özelliğe sahipse **dinamik sistemdir**. Sistemi etkileyen çevresel faktörler sistemin **girişi olarak adlandırılır**. Sistemin izlenen davranışlarına ya da değişkenlerine **sistemin çıkışı denir**.

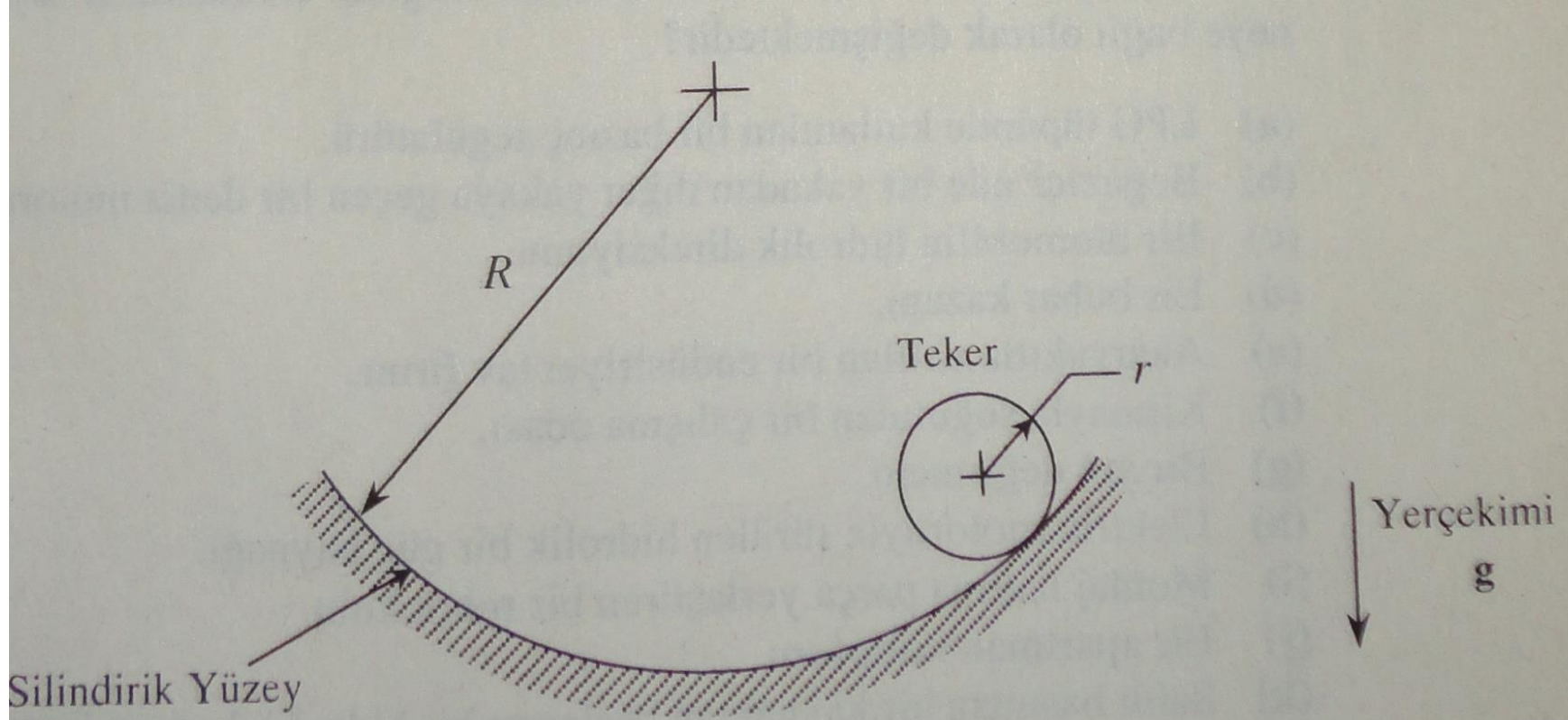


- Bir sistemin girişleri değişirse sistem nasıl davranır; yani sistem çıkışları nasıl değişir?
- Çıkışın özelliklerini iyileştirmek için sistem üzerinde ne gibi değişiklikler yapılabilir?

Örnekler



Bir sistemin kontrol edilebilmesi için öncelikle modellenmesi ve basitleştirilmesi gereklidir. Fiziksel sistemlerde gerçeğe yakın modeller ihmal edilebilir çevresel etkilerin idealleştirilmesi ile elde edilebilir. Eğer çok detaya girilirse modelleme uygulanabilirlikten uzaklaşır. Gereksiz detaylardan kaçınmak gerekir. Bunun için de mühendislik tecrübeleri önem arz eder. Şekildeki sistemde eğer sürtünme ihmal edilirse teker sonsuza kadar silindirik yüzeyde hareketine devam edecektir. Bu durum dünya gerçekliğinden uzak bir yaklaşım olduğundan uzun sürse de nihayet tekerin hareketi sona ererek sistem kararlı hale geçeceğinden sürtünmeyi burada dikkate almak çok önemli bir modelleme yaklaşımıdır. Ancak bu sistem için silindirik yüzey üzerindeki hava direncinin modellemede ihmal etmemek ise gereksiz detaya girmek olacaktır.



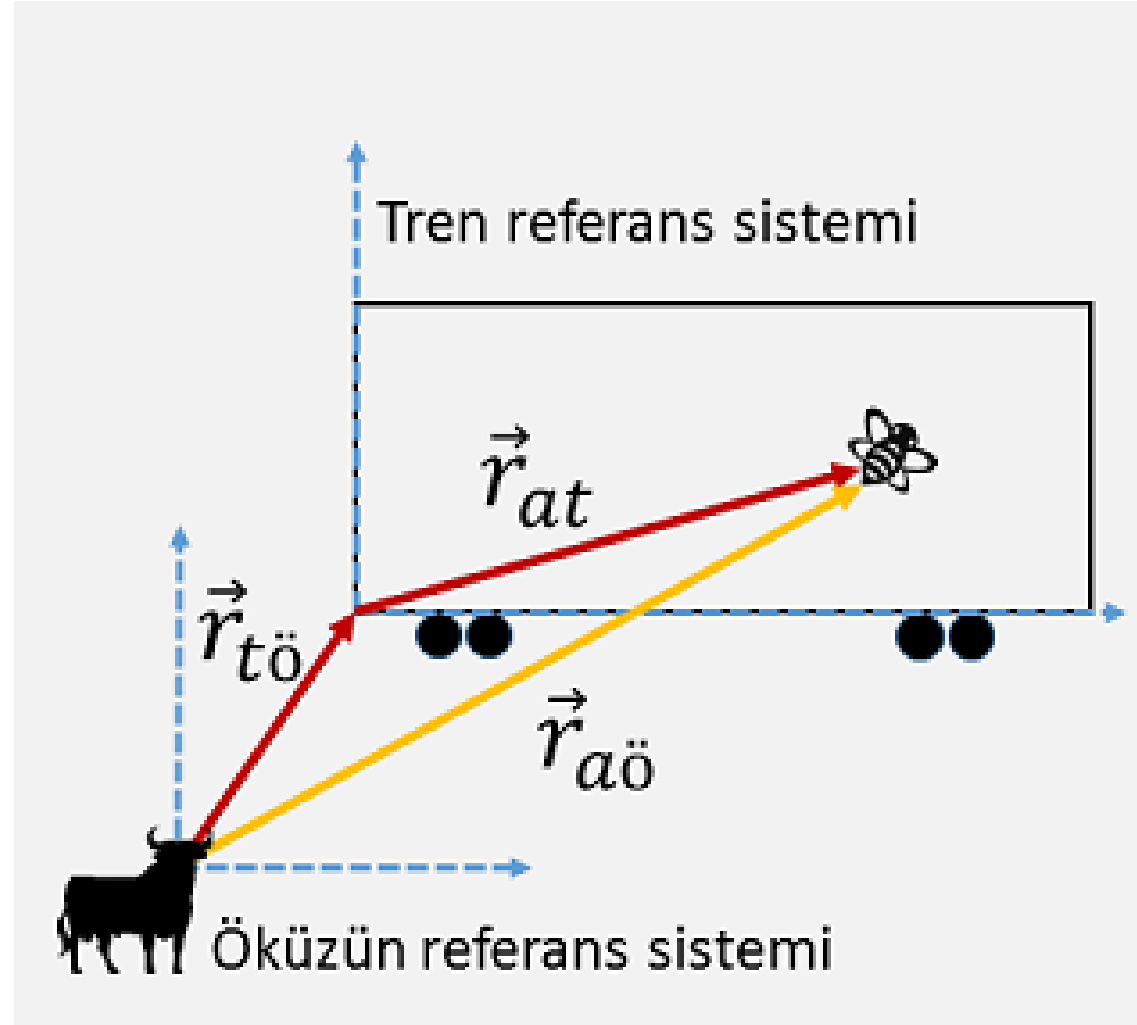
ÖTELEME HAREKETİ YAPAN SİSTEMLERİN ELEMANLARI

1. TEMEL KAVRAMLAR

1. HAREKET
2. KUVVET
3. GÜÇ

1. HAREKET

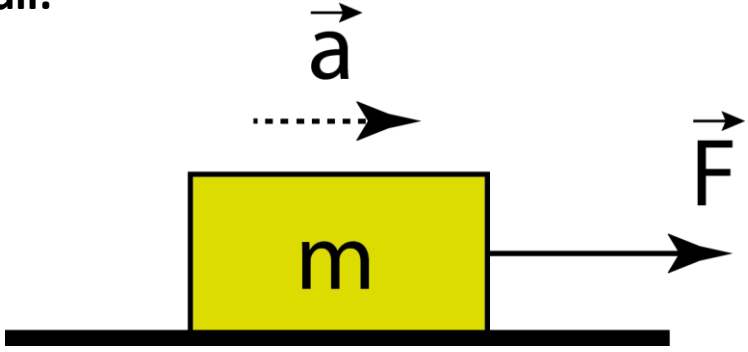
Sabit bir referans sistemine göre yer değiştirme olarak tanımlanır. Arının öküze göre hareketi belirlenirken şekilde verilen referans sistemleri kullanılmalıdır. Aksi halde hareket yanlış modellenir.



$$v = \dot{r}$$
$$a = \dot{v}$$

KUVVET

Kütlenin birim zamanda hız değişimi ile çarpımıdır. Bir cismin hızı sıfır olduğu bir anda eğer net kuvvet etkisi varsa ivmesi vardır. Cismin anlık durmuş olması ivmesiz olması anlamına gelmez. Zira ivme kuvvet etkisiyle ortaya çıkar. Kuvvet etkisi altındaki bir cismin ise ivmesi vardır. rnek olarak krank-biyel mekanizmasının strok hareketi başı ve sonunda biyel uzvu hareket yönünü değiştirdiği için hızı anlık olarak sıfır olmasına rağmen ivmesi bulunmaktadır hatta bu anda ivme maksimum seviyesine ulaşmaktadır.



$$\sum F = ma$$



$$F_1 = F_2$$

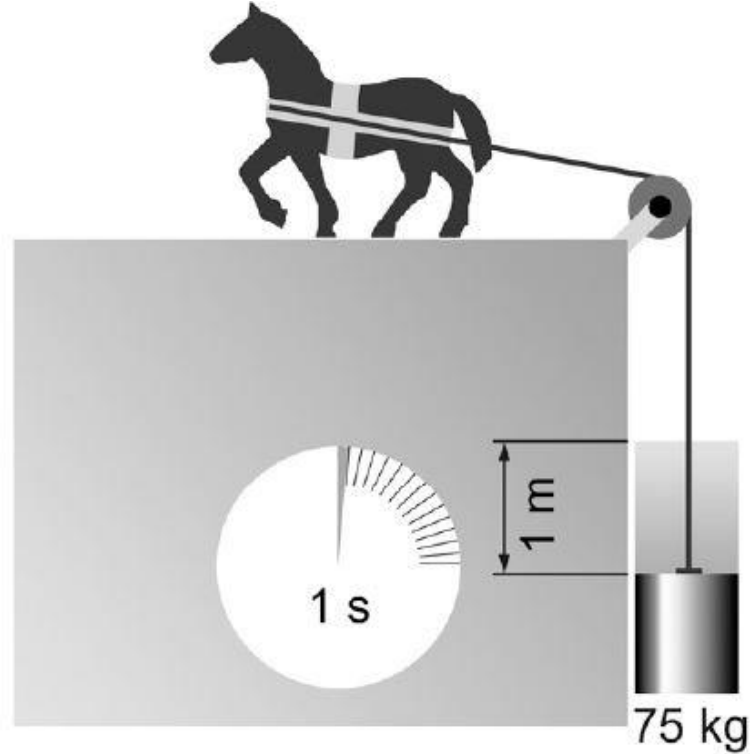
$$\sum F = 0$$

GÜÇ

Birim zamanda enerji akışına güç adı verilir.

$$P = Fv = |F||v|\cos\theta$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} Fv dt$$



hp	kW
1	0,745700

2. ÖTELEME DURUMUNDAKİ SAF KÜTLE

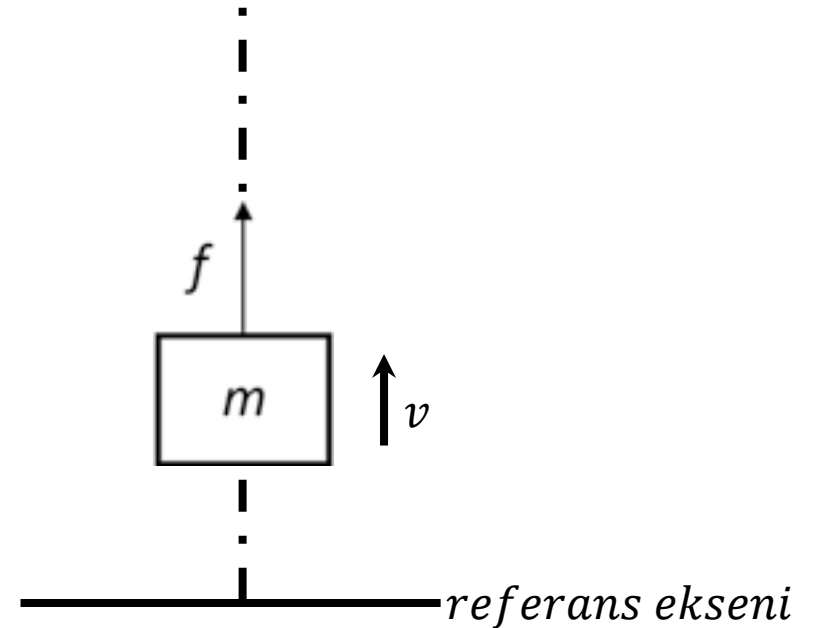
Maddelerin hız değişikliğine karşı koyma özelliğine kütle özelliği denir. Mekanik sistemlerin dinamik davranışlarını etkileyen en önemli faktörlerden biridir. Öteleme hareketi yaptığında bir kütle doğru boyunca hareket etmiş olur. Saf kütle sadece hız değişimine karşı koyma özelliğini içermektedir. Enerjiyi ısıya dönüştürme ya da esneklik sayesinde enerjiyi depolama özelliklerine sahip değildir. Diyagramlarda dikdörtgen olarak modellenir.

Newton'un 2. yasasına göre bir kütlenin zamana göre momentumundaki değişimi, o kütleyle etkiyen dış kuvvetin büyüklüğüne ve yönüne eşittir. Kuvvet etkisinde;

$$\sum F = m\mathbf{a} = m \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

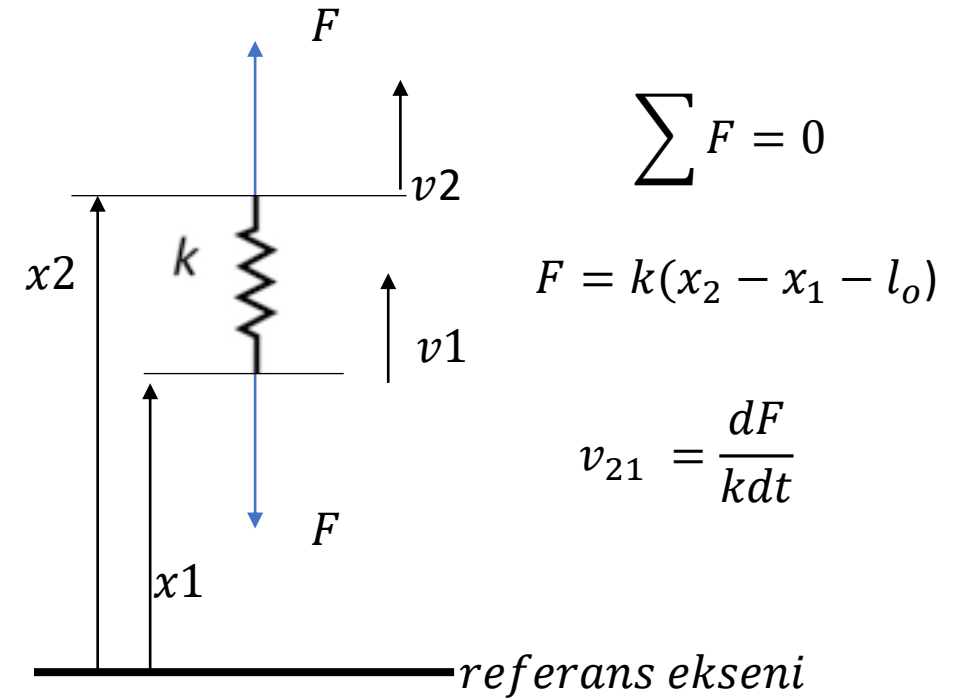
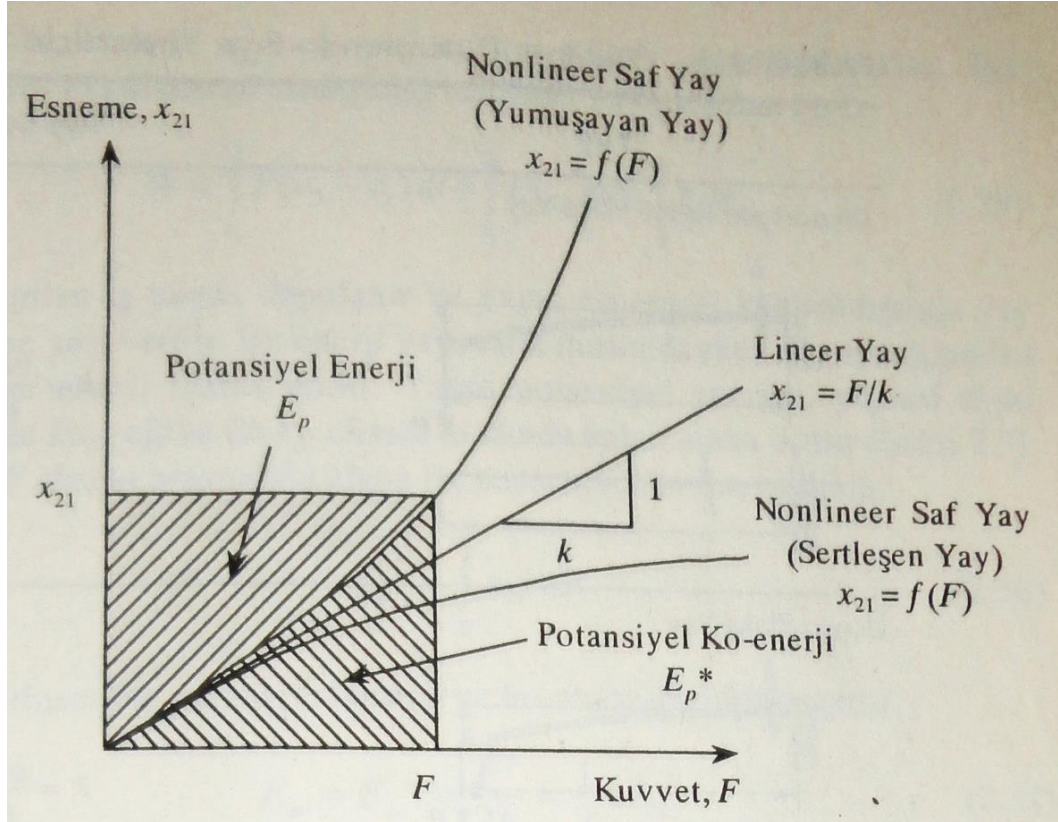
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Saf kütlenin dinamik davranışını, momentumu ile mutlak hızı arasındaki ilişki belirler. Mühendislik uygulamalarında ışık hızına çıkılamayacağından bu kütle sabit kabul edilebilir. Buna Newton kütlesi denir

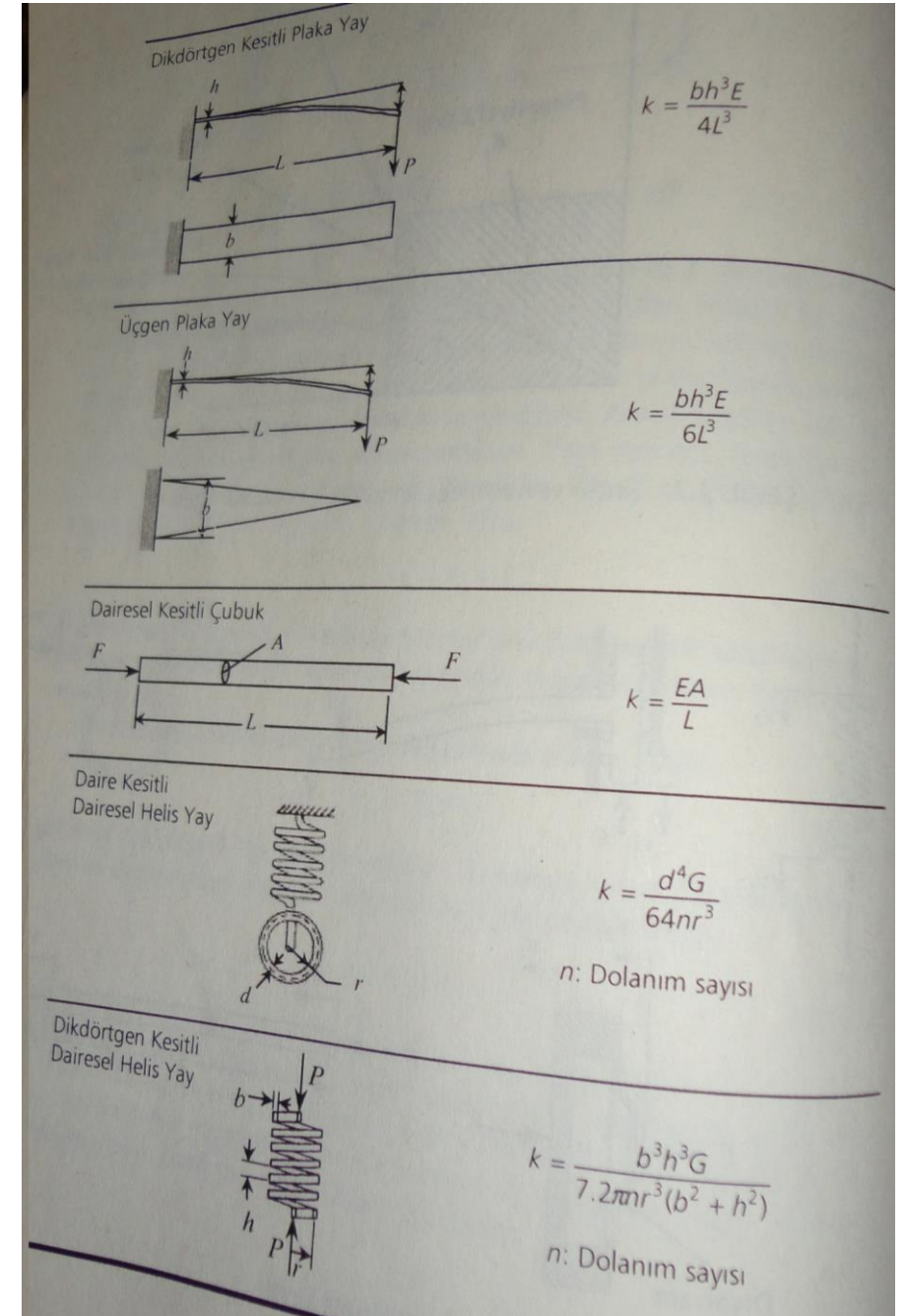
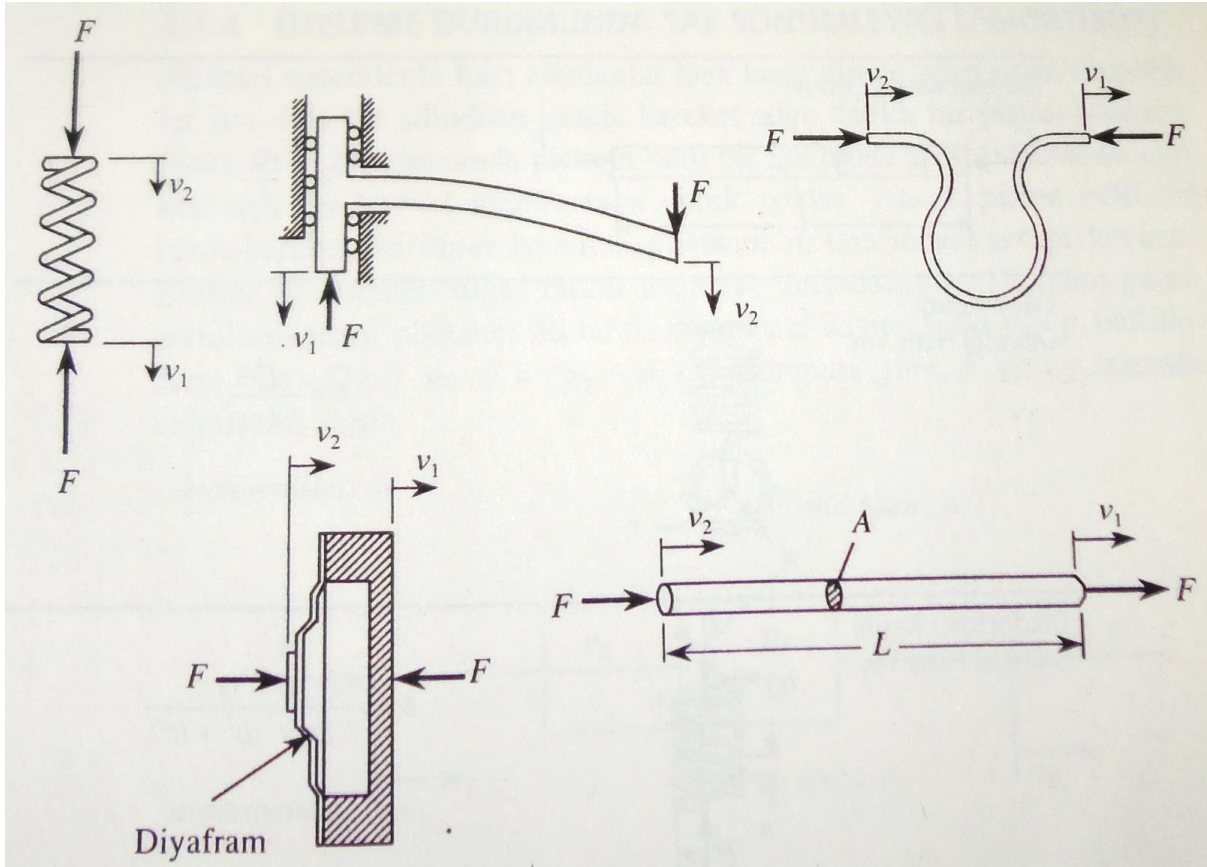


3. ÖTELEME DURUMUNDAKİ SAF YAY

Mekanik sistemlerde elemanların esneme özellikleri cisimlerin elastik deformasyona uğramasından kaynaklı etkileri modellemek için kullanılır. Bu özellik kuvvet uygulandığında etkin olur. Kuvvet etkisi kalkınca ortadan kalkar. Bu özellik bir yay ile modellenir. Yay öteleme hareketi için tek doğrultuda boy değiştirir. Bu yay öteleme yayı denir ve enerji depolama özelliği vardır. İdeal saf bir yayda , kütle ve enerjiyi ısıya dönüştürme özelliği olmaması gerekir.



3. ÖTELEME DURUMUNDAKİ SAF YAY

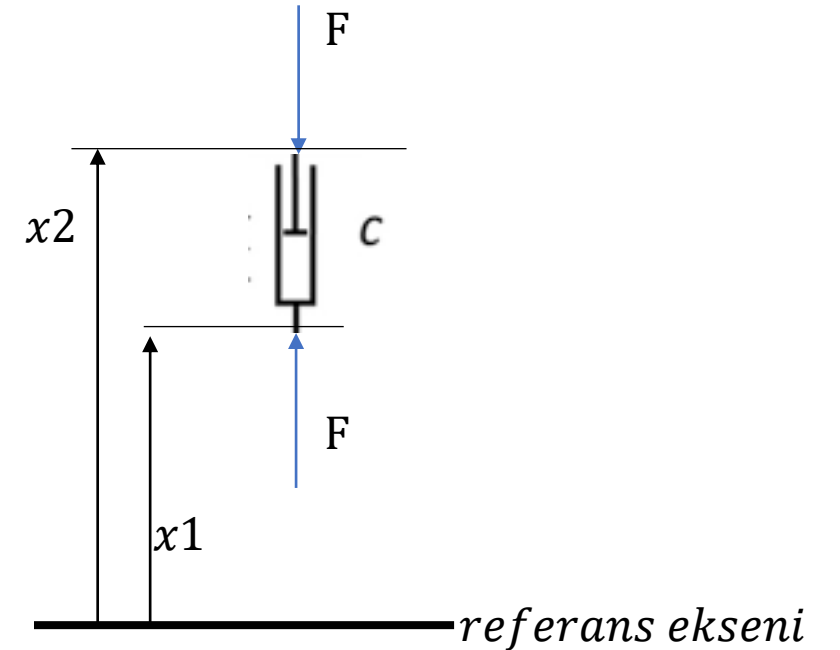
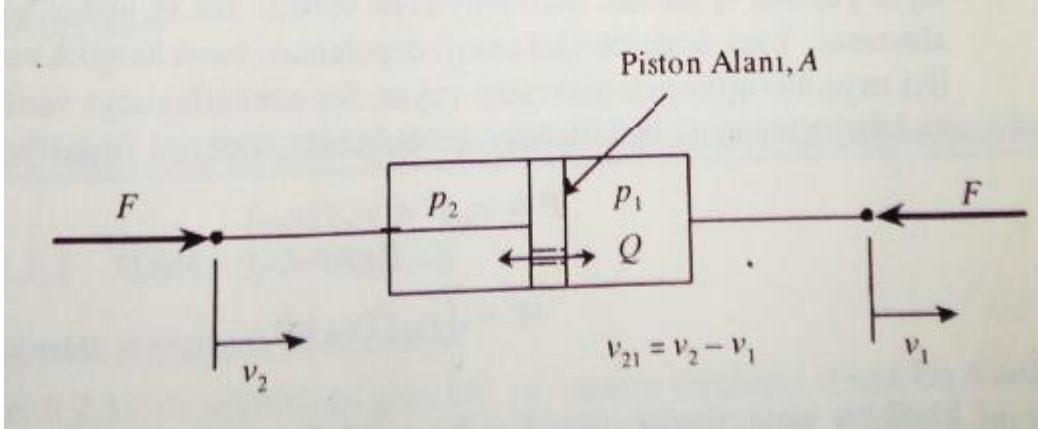


4. ÖTELEME DURUMUNDAKİ SAF SÖNÜMLEYİCİ

Mekanik sistemlerde bazı elemanlar hıza karşı direnç gösterir. Örneğin içi sıvı dolu bir silindir içinde iki tarafından akışa izin veren bir deliğe sahip piston düşünelim. Bu piston hareketsiz vaziyette sistemde durabilir. Ancak hareket ettirilmek istendiğinde bu delikten sıvı akış debisi pistonun iki tarafındaki basıncı belirler.

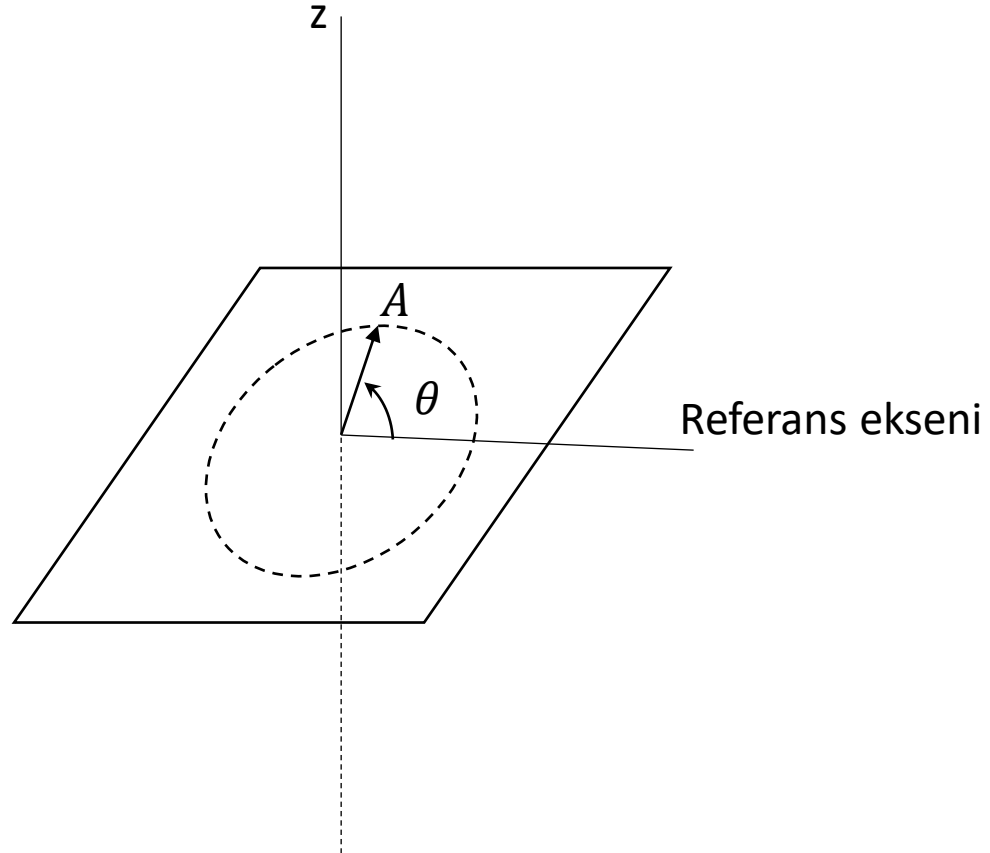
$$v_{21} = \frac{Q}{A} \text{ ve } F = (p_2 - p_1)A \text{ olduğundan } F \text{ ile } v_{21} \text{ arasında bağımlılık vardır.}$$

$$F = c v_{21} = c \dot{x}$$



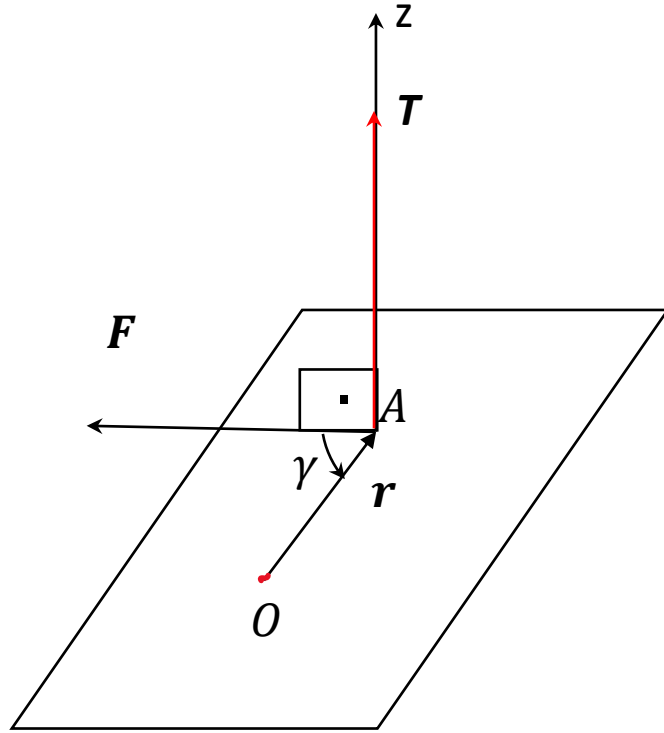
DÖNME DURUMUNDAKİ SİSTEM ELEMANLARI TEMEL KAVRAMLAR

Şekilde gösterildiği gibi bir A noktası z eksenini etrafında dönme hareketi yapıyorsa, bu noktanın θ konumundaki hızı ve ivmesi sırasıyla $\dot{\theta}$ ve $\ddot{\theta}$ dir. Yani zamana göre türevleri alınarak hesaplanır.



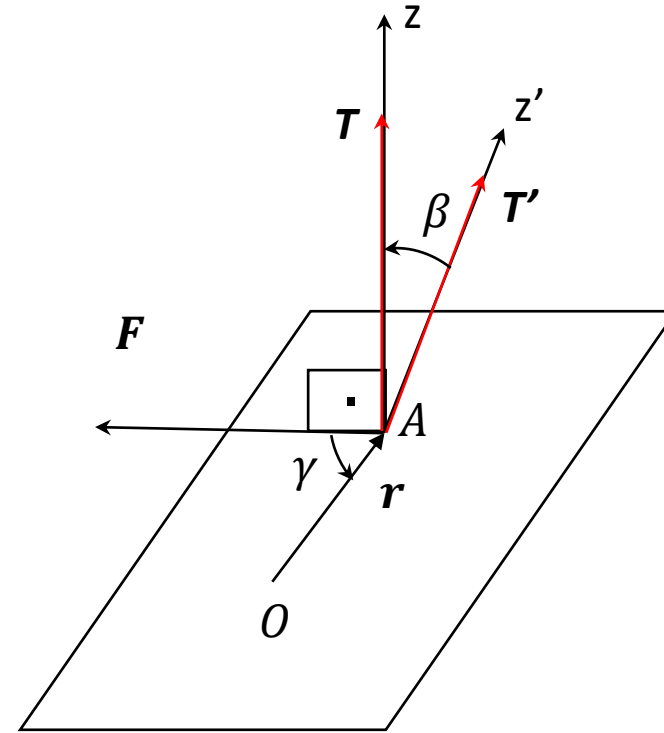
TEMEL KAVRAMLAR

Eğer bir A noktasına F kuvveti uygulanırsa O noktasında oluşturacağı tork ya da moment;

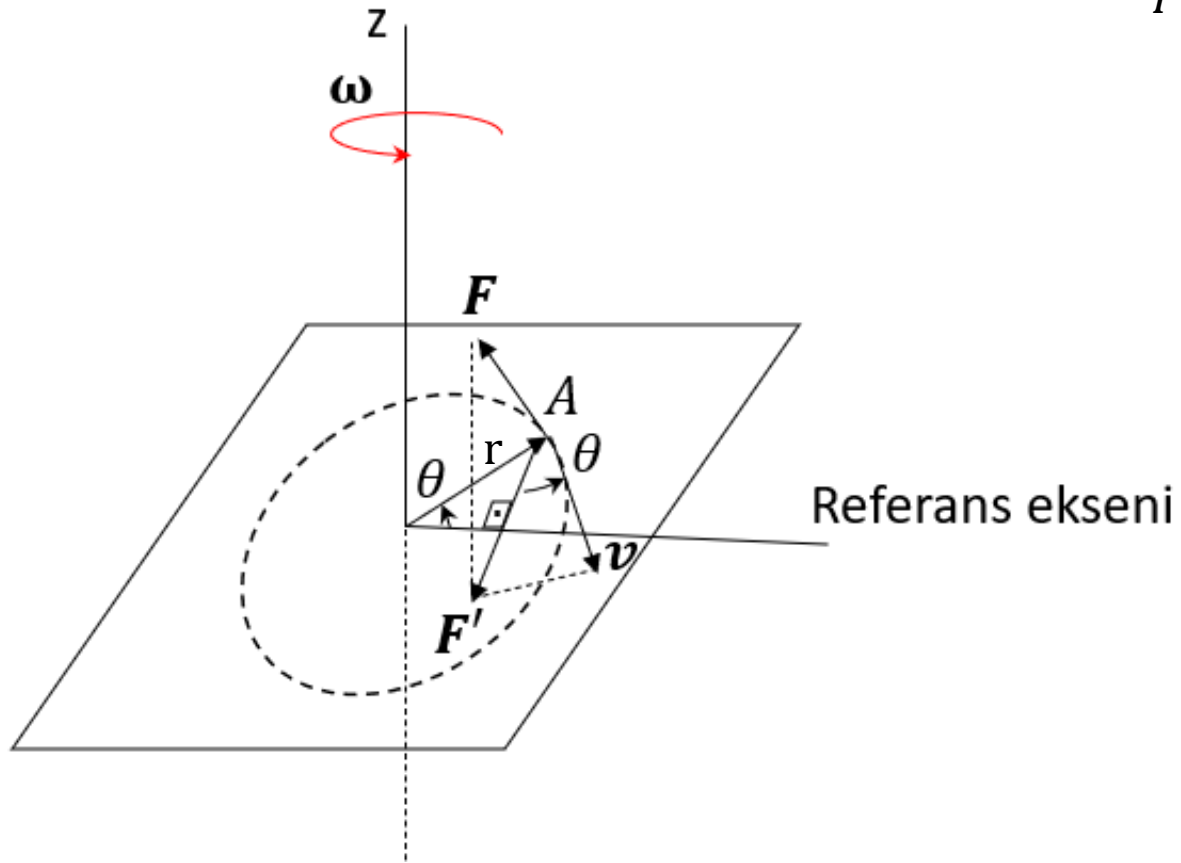


$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \text{ ya da } |\mathbf{T}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\gamma$$

$$|\mathbf{T}'| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\gamma\cos\beta$$



TEMEL KAVRAMLAR

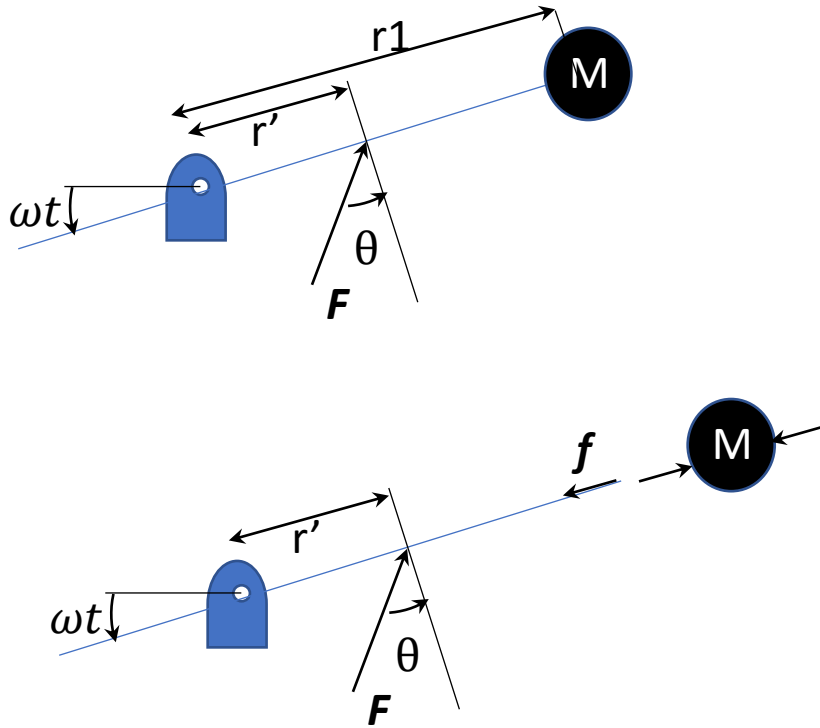


$$P = F'v \cos\theta = F'\omega r \cos\theta = T\omega,$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} T\omega dt$$

SAF DÖNEL KÜTLE

Sistemde sabit bir mafsala kütle ve esneme özelliği olmayan bir çubukla bağlanan bir kütlenin bu sabit mafsalı etrafındaki dönmesi esnasında gösterdiği direnç sistemdeki SAF DÖNEL KÜTLE elemanını oluşturur. Çubuk rijit, kütle ve sürtünmesiz olarak kabul edildiğinden bu sistemdeki net güç sıfır olmak zorundadır. Kinetik enerji depolama özelliği olduğu söylenebilir. Buna örnek olarak mekanik sistemlerde Volan kinetik enerjiyi depolayarak sistemin tahriki durdurulduğunda sistemi bir süre daha çalıştırmaya devam eder.



$$P = F \cos \theta v - f v = F \cos \theta \omega r' - f \omega r_1 = 0,$$

$$T_1 = F \cos \theta r' = f r_1$$

$$p = m v = m \omega r_1$$

$$f = \dot{p} = m \dot{v} = m \dot{\omega} r_1$$

r₁ ile çarpılırsa

$$f r_1 = m \dot{\omega} r_1^2 = F \cos \theta r'$$

$$T_1 = m \dot{\omega} r_1^2$$

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \dots + T_n = \dot{\omega}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 \dots + m_n r_n^2)$$

$$T = \sum_1^m T_i = \left(\sum_1^n m_j r_j^2 \right) \dot{\omega}$$

$$J = \int_1^m r^2 dm = \int_1^v r^2 \rho dV$$

$$T = J \frac{d\theta^2}{dt^2}$$

$$T = J \frac{d\omega}{dt}$$

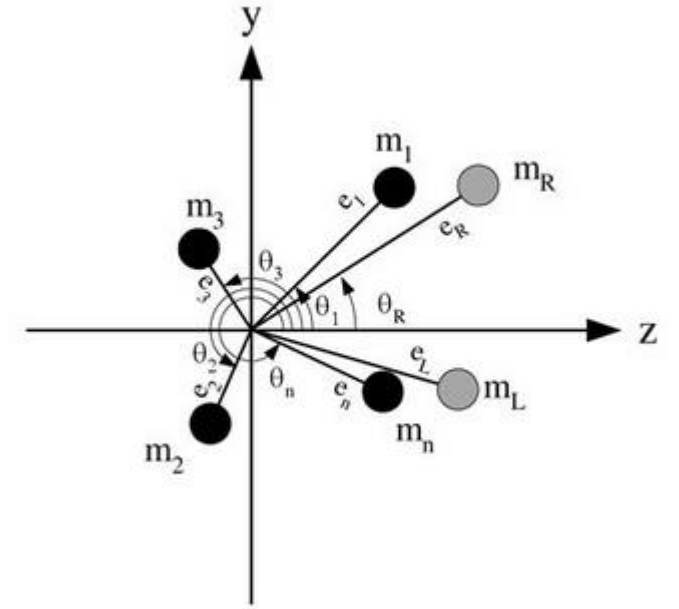
$$T = J\alpha$$

Dönen kütle açısal momentumu

$$\frac{dh}{dt} = T$$

$$E_k = \int_{t_1}^{t_2} T \omega dt = \int_0^h \omega dh$$

Kümelenmiş kütleler



SAF DÖNEL YAY

Eylemsizlik ve enerjiyi ısıya dönüştürme özelliği olmayan ve bir moment çifti uygulandığında açısız esneme özelliği gösteren sistem elemanıdır. Bir sistem elemanı saf döneş yayın bir ucuna bağlansa ve diğere ucundan da yaya moment uygulansa bu moment yaya bağı elemana aynen iletilir. Böylece moment yay elemanı üzerinde bir uçtan diğere uca akmiş olur. Eğer yaya bağı eleman hareket etmezse, yay enerji depolar. Burada yay statik olduğundan depolanan enerji de potansiyel enerjidir.

Moment

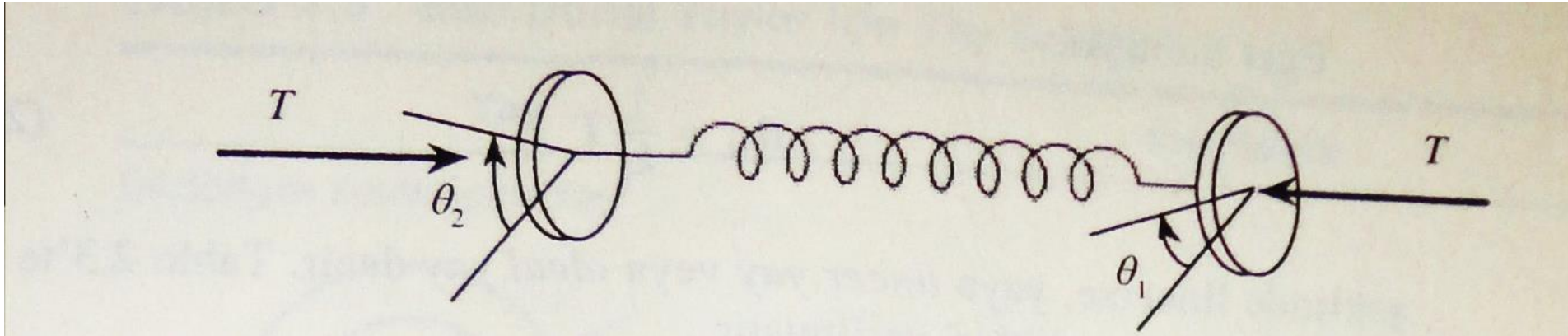
$$T = k\theta_{21}$$

Güç

$$P = T\omega_2 - T\omega_1 = T\omega_{21}$$

Enerji

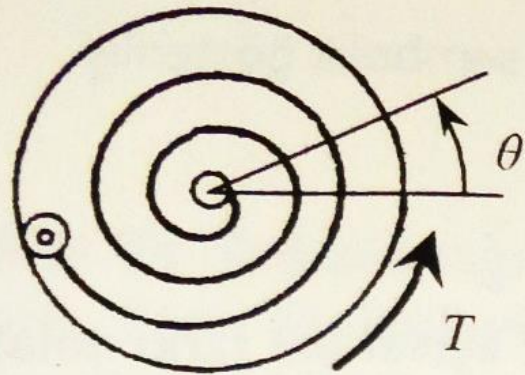
$$E_p = \int_{t_1}^{t_2} T\omega_{21} dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} T d\theta_{21}$$



TABLO 2.3 Bazı Dönel Yaylar İçin Yay Sabitleri

Yay	Yay Sabiti
-----	------------

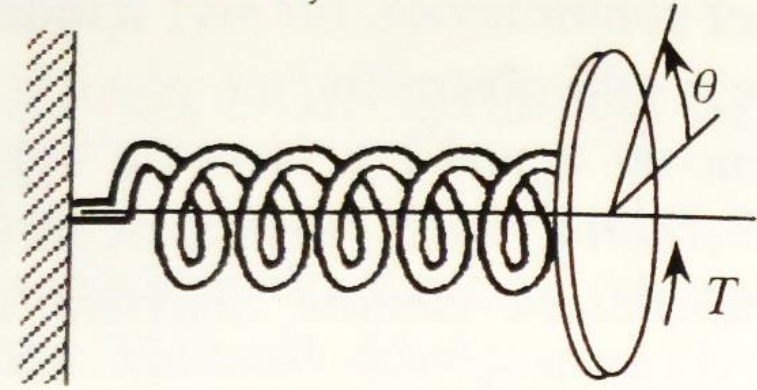
Dikdörtgen Kesitli Spiral Yay



$$k_t = \frac{EI}{L}$$

L : Uzunluk

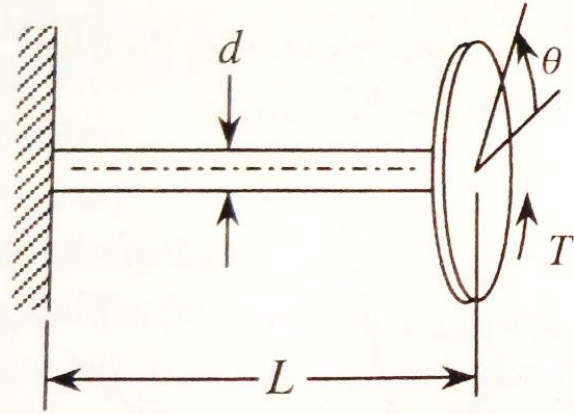
Dairesel veya Dikdörtgen Kesitli Silindirik Helis Yay



$$k_t = \frac{EI}{L}$$

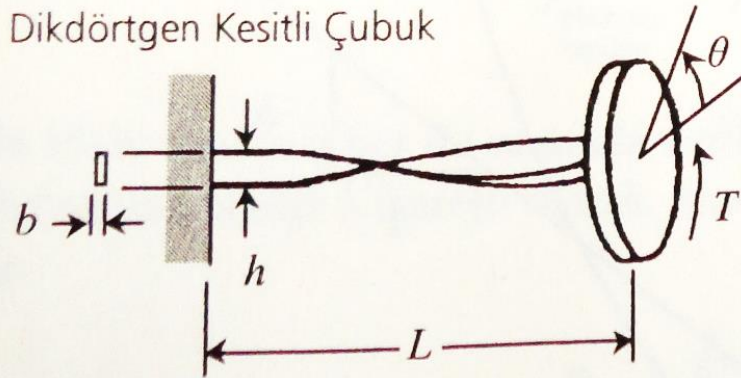
L : Uzunluk

Daire Kesitli Çubuk



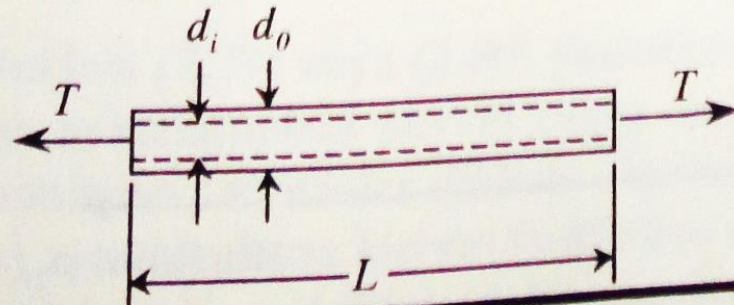
$$k_t = \frac{\pi d^4 G}{32L}$$

Dikdörtgen Kesitli Çubuk



$$k_t = \frac{b^3 h^3 G}{3.6L(b^2 - h^2)}$$

Daire Kesitli Boru



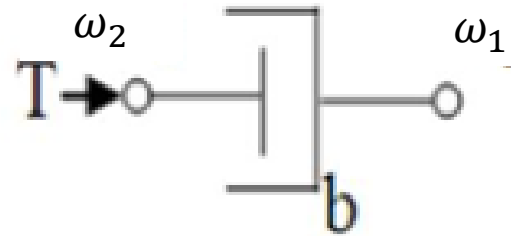
$$k_t = \frac{\pi E (d_o^4 - d_i^4)}{64(1 + \mu)L}$$

μ : Poisson oranı.

SAF DÖNEL SÖNÜMLEYİCİ

İki ucu arasında hız farkı dolayısıyla kendisine verilen enerjiyi ısıya dönüştüren elemandır. Eylemsizlik ve yay özelliği göstermeyen yani enerji depolamayan sadece ısıya çeviren bir özelliği vardır.

$$T = b\omega_{21}$$
$$P = T\omega_{21}^2$$



MEKANİK SİSTEMLERDE TİTREŞİM

Bir sistemin denge durumu etrafındaki salınımı titreşim olarak isimlendirilebilir.

Bir elektrikli süpürgenin alt ya da üst dairelere yaydığı ses

İçten yanmalı motordan gelen ses

İnsanın kalp atışı

Şehir şebekesindeki dalgalanma dolayısıyla evdeki ampulün parlaklığındaki değişim

Deprem

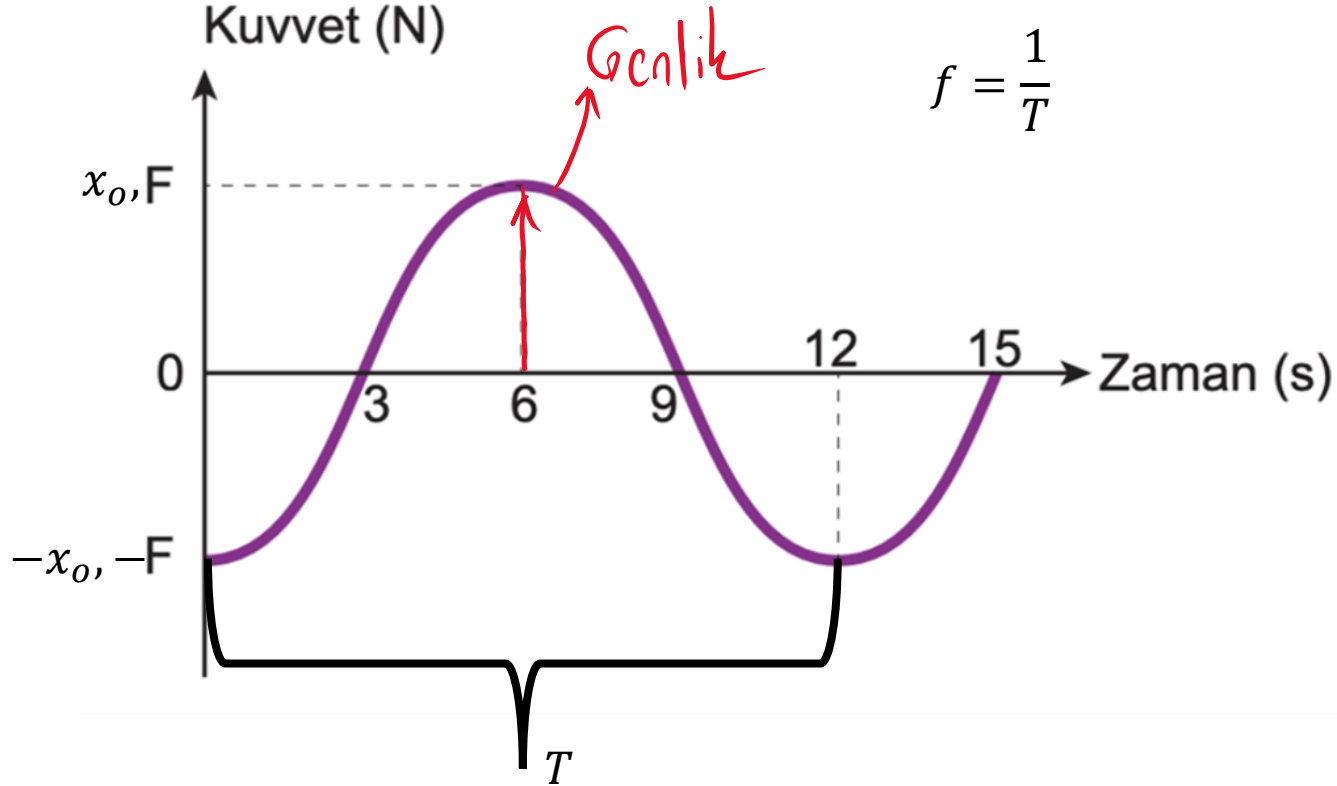
Köprülerde fırtınalı havalardaki salınım

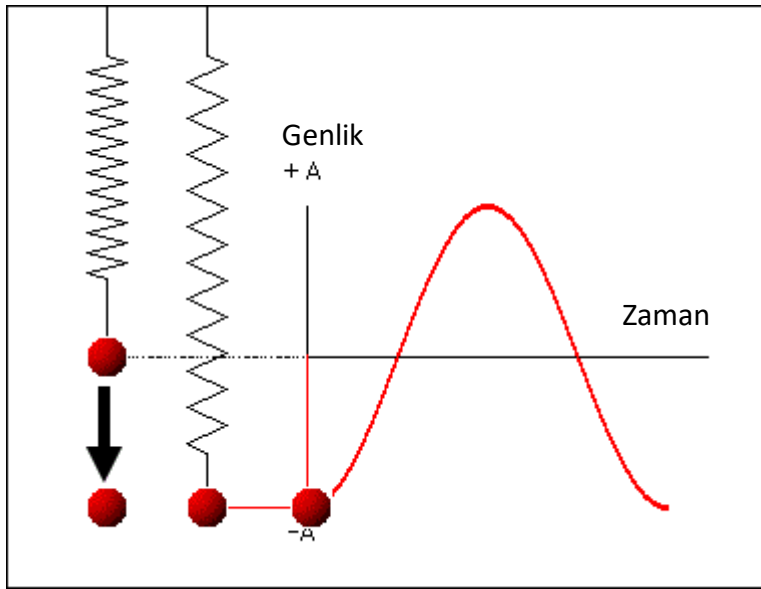


Makineler genellikle periyodik hareket yapacak şekilde tasarlanmaktadır. Bu hareket esnasında sistem elemanlarının zamana göre değişen şiddet ve yönde kuvvete veya momente maruz kalması söz konusudur. Bu nedenle sistem elemanları denge durumu etrafında salınım yaparlar yani titreşirler. Zamana göre yönü ve şiddeti değişen kuvvet ve moment, sistemin statik analizinde ortaya çıkmayacak büyüklükte yüksek şiddetler ortaya çıkarabilir. Bu yüksek şiddet sistemin mukavemet özelliklerini aşip kalıcı deformasyona neden olabilir. Makinelerde titreşim istenmeyen bir durumdur. Çünkü titreşime neden olan kuvvet, gürültü, aşınma ve yorulma gibi istenmeyen durumları ortaya çıkarmaktadır. Buna karşın asfalt silindirleri, masaj aletleri, darbeli matkaplarda ise titreşim özellikle istenir. Buralarda titreşim yapılan işin gerçekleşmesine büyük katkı sağlamaktadır.

TANIMLAR

Makineler genellikle hareketlerini belirli sürelerde tekrar ederler. Bu türden sistemlerde gerçekleşen titreşime **periyodik titreşim** adı verilir. Hareketin kendini tekrar ettiği zamana **periyot** denir ve T harfi ile gösterilir. Bir periyotluk titreşime **salınım** denir. Birim zamandaki salınım sayısına **frekans** adı verilir. Periyot ile frekans ters orantılıdır. Frekans birimi salınımın saniyeye oranı ile elde edilir ve bu orana Hertz denir. Eğer hareket süresince periyodik titreşim hiç değişmeden kendisini tekrar ediyorsa **durağan periyodik titreşimdir**. Bu durağan titreşimde hareket bir sinüs dalgası şeklinde değişiyorsa **harmonik titreşimdir**.





HARMONİK TİTREŞİM

$$x = x_0 \sin(\omega t),$$

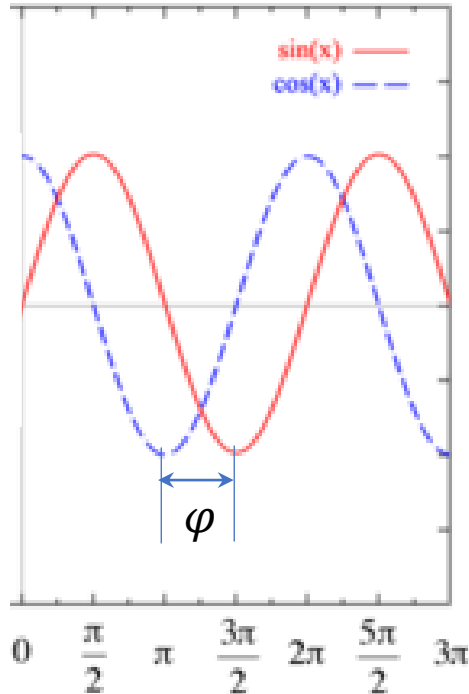
$$x = A \sin(\omega t + \varphi),$$

$$x = A \cos(\omega t),$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

$$x = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

$$x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \varphi), \varphi = \tan^{-1} \frac{B}{A}$$



ω , dairesel frekans ya da açısal frekans denir
ve $\frac{\text{radyan}}{\text{saniye}}$ cinsinden ifade edilir. Salınım süresi T olduğuna

göre ve sinüs fonksiyonunda bir salınımda 2π radyan konum değiştiğine

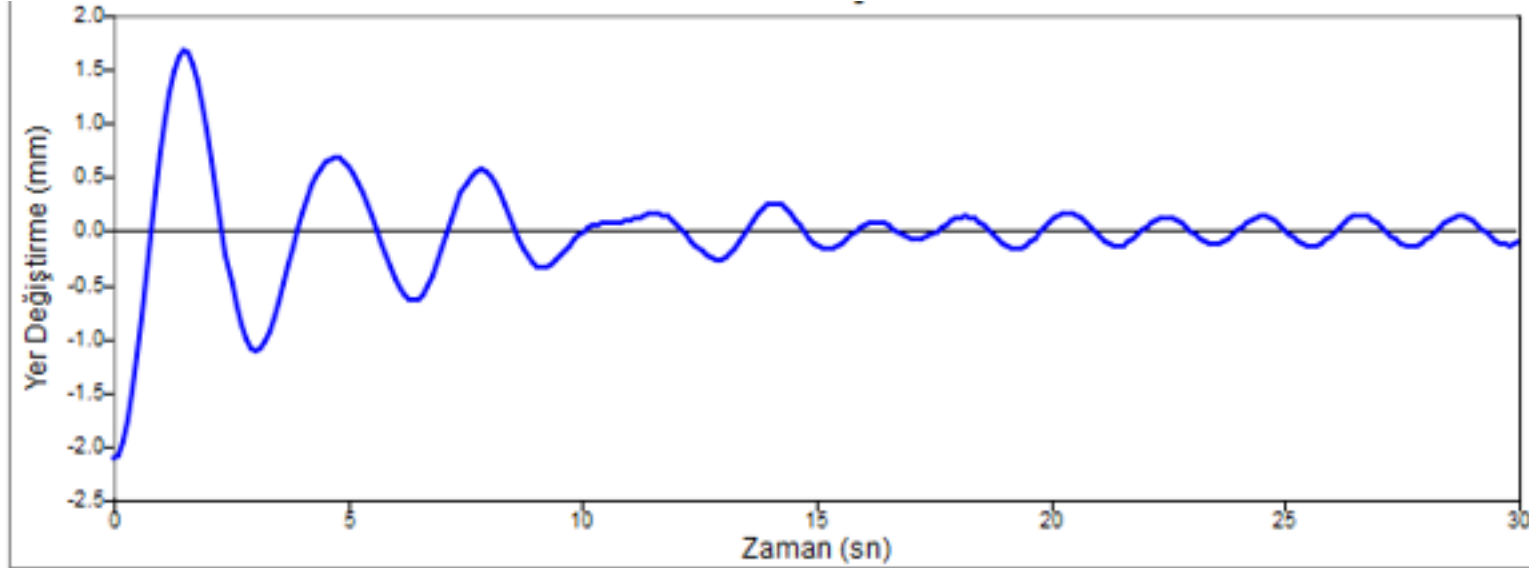
göre;

$$\omega T = 2\pi,$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Faz farkı, $\varphi = \omega \tau_d$ \rightarrow becikme süresi

Titreşim sırasında hareketin özelliği değişiyorsa buna **geçici** (transient) titreşim denir. Düz bir zeminde serbest bırakılan bir topun duruncaya kadar sekmesi esnasında genliğinin değişmesi **geçici titreşim** olduğunu göstermektedir. Eğer sisteme etki eden dış kuvvet ya da moment yoksa sistem **serbest titreşim** yapmıyordur. Böyle bir titreşimi gerçekleştiren sistemin frekansına **doğal (tabii) frekans** denir. Doğal frekans ω_d ifadesi ile ya da f_d ifadesi ile gösterilir ve radyan/saniye ya da salınım/saniye cinsinden birime sahiptir. Sistemde dış kuvvetler etkisinde titreşim gerçekleşiyorsa buna **zorlanmış titreşim** denir. Eğer zorlayan kuvvet harmonik bir değişim gösteriyorsa **harmonik zorlama** denir. Eğer zorlama frekansı sistemin doğal frekansı ile aynıysa **rezonans** gerçekleşir. Rezonans sistemlerin tahrip olmasına neden olan bir durumdur.



Eleman

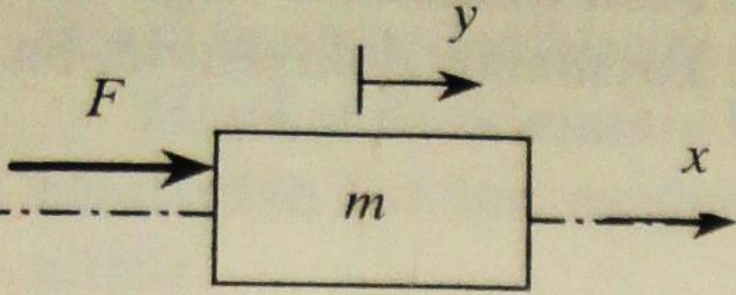
Yapısal İlişki

Eleman Denklemi

Enerji veya Güç

Öteleme Sistemleri

Kütle

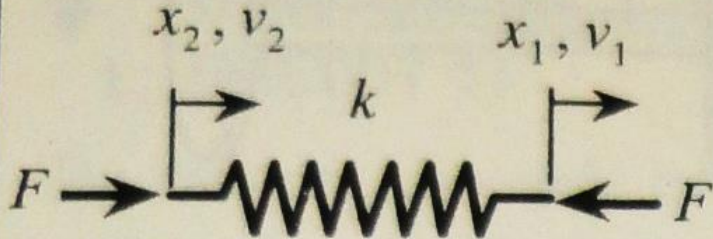


$$p = mv$$

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2$$

Yay

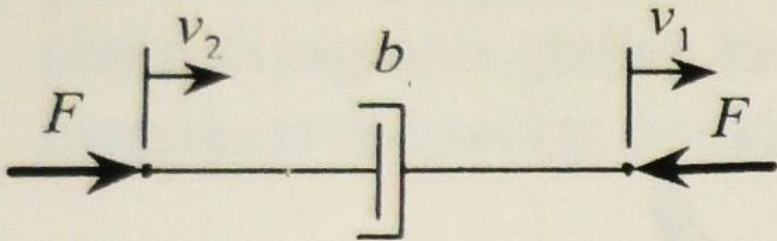


$$x_{21} = \frac{1}{k} F$$

$$v_{21} = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$$

$$E_p = \frac{1}{2} kx_{21}^2$$

Sönümleyici



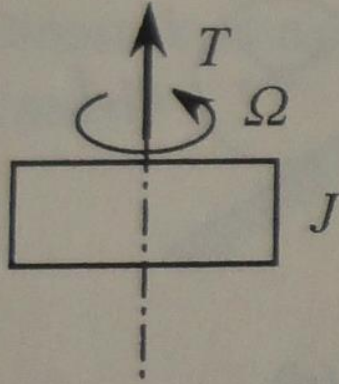
$$F = bv_{21}$$

$$F = bv_{21}$$

$$P = bv_{21}^2$$

Dönel Sistemler

Eylemsizlik

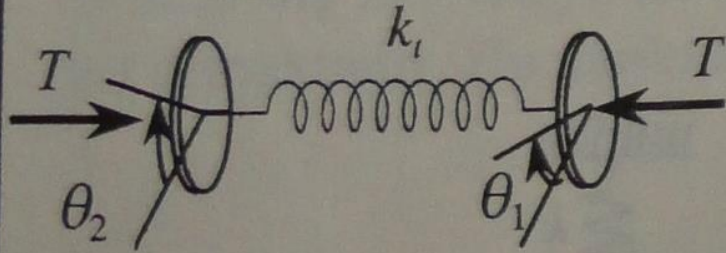


$$h = J\Omega$$

$$T = J \frac{d\Omega}{dt}$$

$$E_k = \frac{1}{2} J\Omega^2$$

Dönel Yay

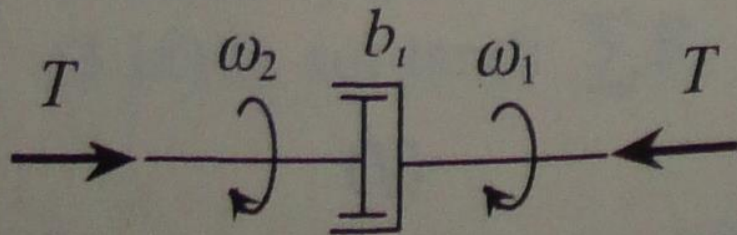


$$\theta_{21} = \frac{1}{k_t} T$$

$$\Omega_{21} = \frac{1}{k_t} \frac{dT}{dt}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k_t \theta_{21}^2$$

Dönel Sönümleyici



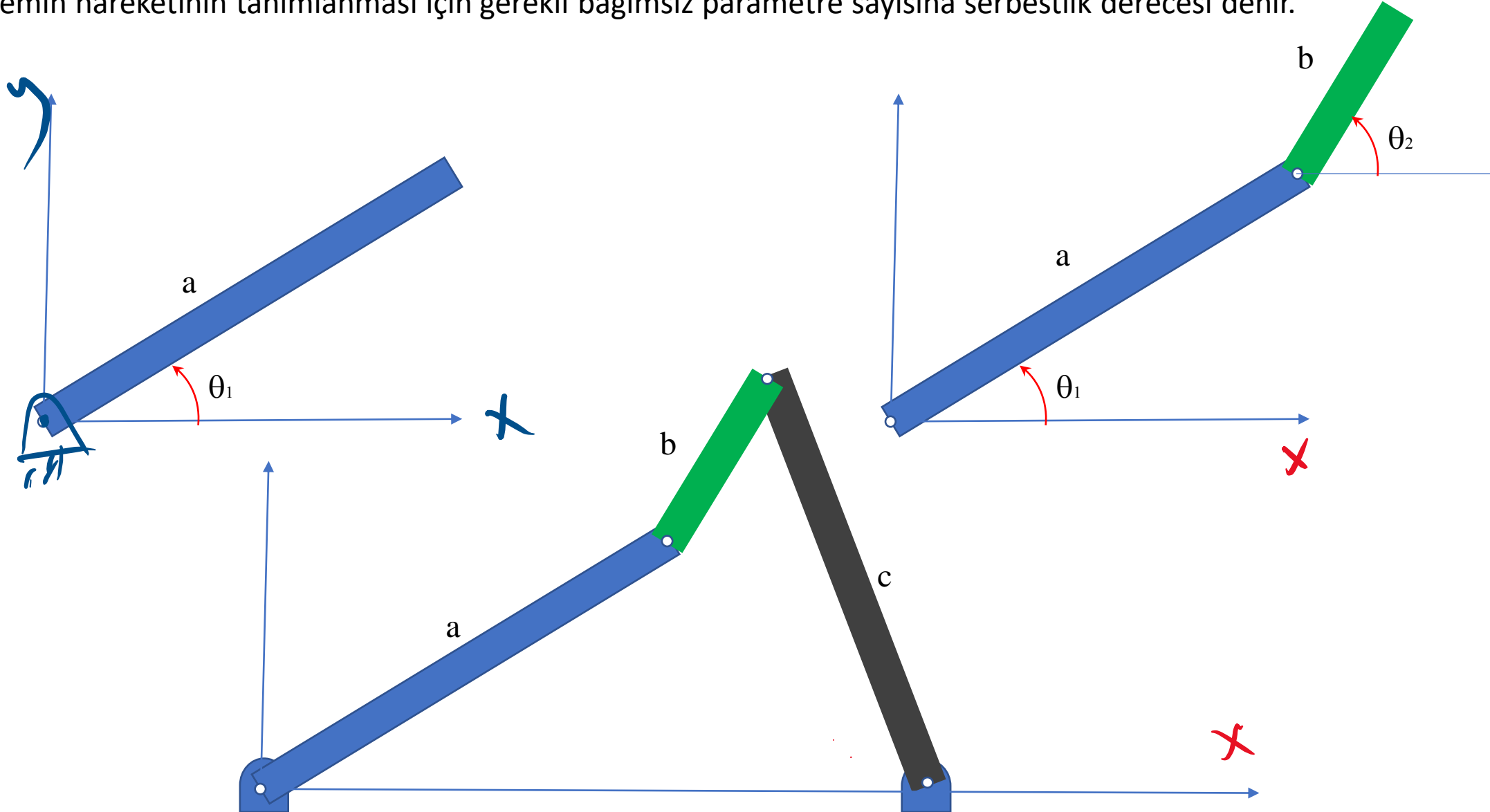
$$T = b_t \omega_{21}$$

$$T = b_t \omega_{21}$$

$$P = b_t \omega_{21}^2$$

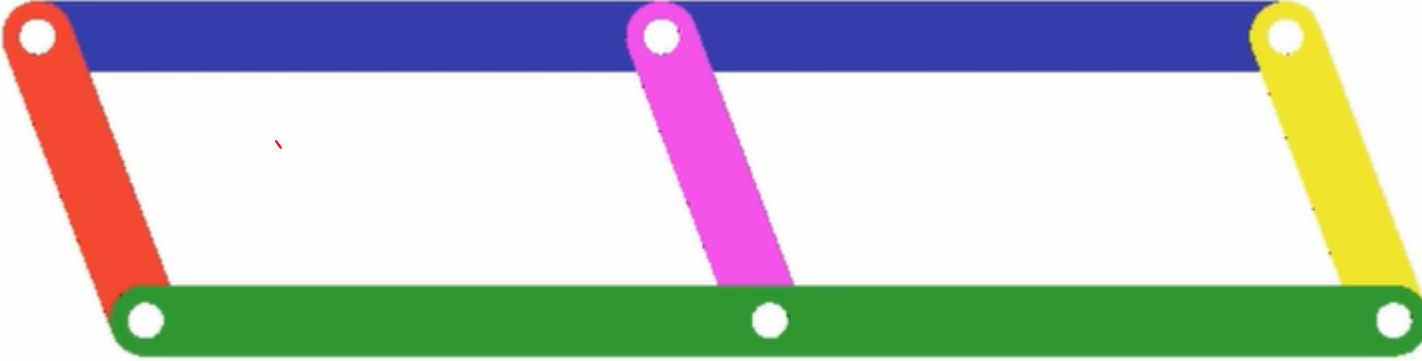
SERBESTLİK DERECESİ

Sistemin hareketinin tanımlanması için gerekli bağımsız parametre sayısına serbestlik derecesi denir.



Yedek Elemanlı Sistem (Redundant)

İstenilen hareketi sağlamak için gereğinden fazla eleman kullanılmasıdır. Sisteme daha sert, daha dayanımlı bir yapı kazandırmak için istenebilir.



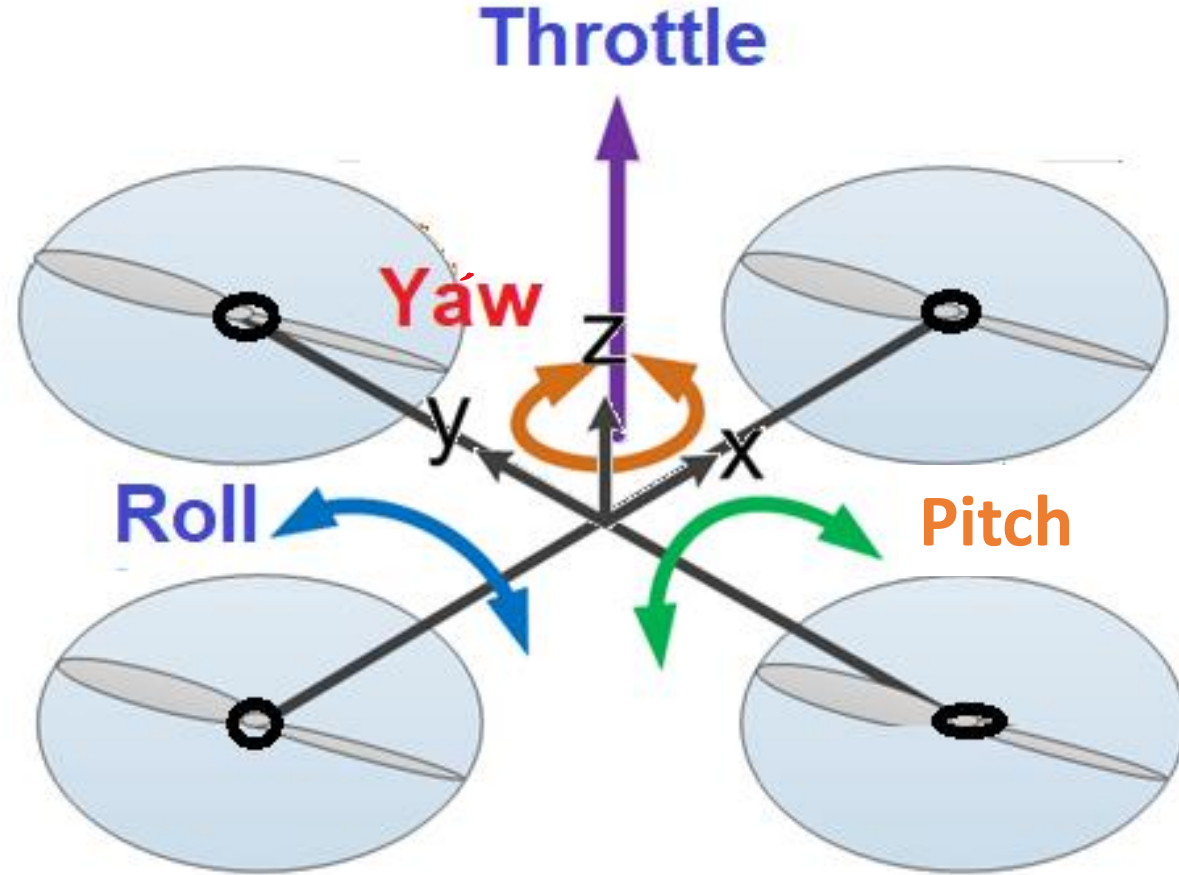
Yedek Elemanlı Sistem (Redundant)

Drones for hazardous
inspection



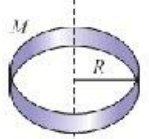
Düşük Tahrikli Sistem (Underactuated)

Sistemin sahip olduğu serbestlik derecesinden daha az sayıda tahrik elemanı kullanarak hareket etmesidir.



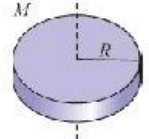
Bazı cisimlerin eylemsizlik momentleri

Halka: $I = MR^2$



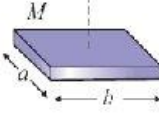
Disk veya silindir

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

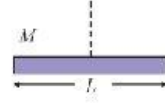


Dikdörtgen levha

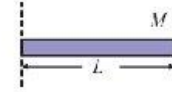
$$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$



Çubuk: $I = \frac{1}{12}ML^2$

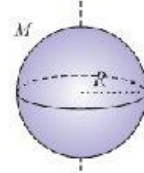


Çubuk: $I = \frac{1}{3}ML^2$

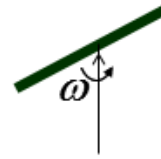


Küre: $I = \frac{2}{5}MR^2$

Dolu

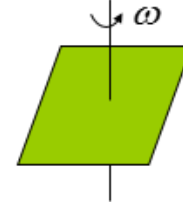


Dönen çubuk



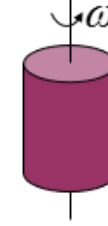
$$I = \frac{1}{12}ml^2$$

Dikdörtgen levha



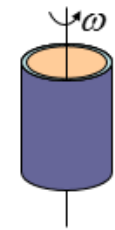
$$I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$

İçi dolu silindir



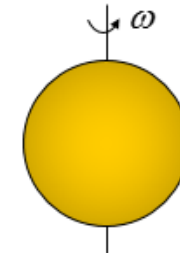
$$I = \frac{1}{2}mr^2$$

İçi boş silindir



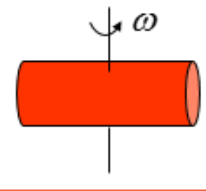
$$I = mr^2$$

İçi dolu küre



$$I = \frac{2}{3}mr^2$$

İçi dolu silindir



$$I = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$$

Boş

Enerji yöntemi

Kütle $\rightarrow E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

Yay $\rightarrow E_p = \frac{1}{2} k x^2$

Damper $\rightarrow W = b \cdot \dot{x} \cdot x$

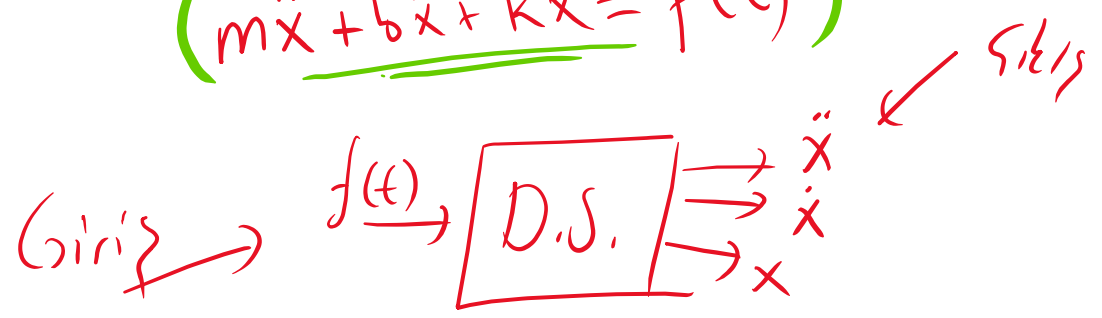
$$E_t = \frac{1}{2} (m \dot{x}^2 + k x^2)$$

$$P = \dot{F} \cdot \dot{v}$$

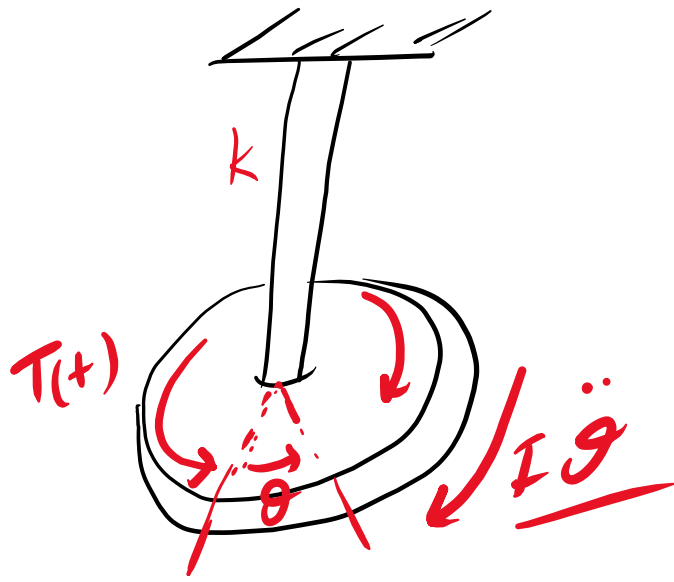
$$\frac{dE_t}{dt} = P - b \dot{x}^2 = f(t) \cdot \dot{x} - b \dot{x}^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \cancel{x} \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \cancel{x} \cdot \dot{x} = f(t) \cdot \cancel{\dot{x}} - b \cancel{\dot{x}}^2$$

$$(m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = f(t))$$



Eylemsizlik ve Yay Sistemi



$$T(t) - k \cdot \theta = I \cdot \ddot{\theta} \quad \leftarrow \text{Newton}$$

$$T(t) - k \cdot \theta - I \cdot \ddot{\theta} = 0 \quad \leftarrow \text{D'Alembert}$$

$$T(t) = \frac{I \cdot \ddot{\theta} + k \theta}{\downarrow \text{çizim}}$$

↑ girij

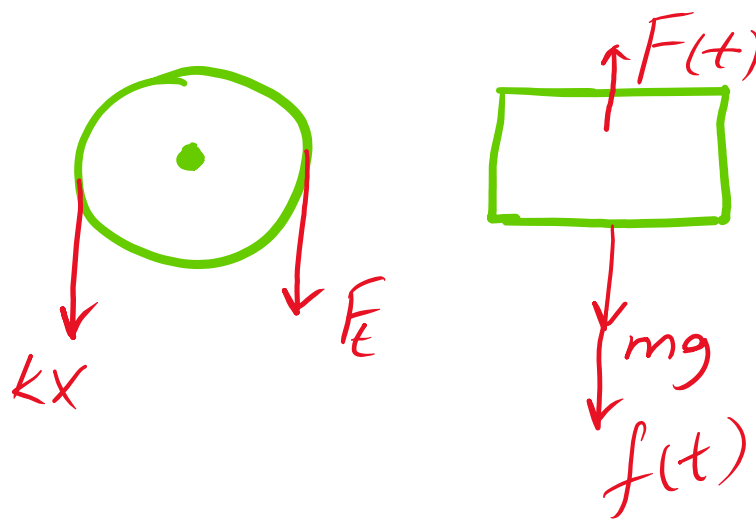
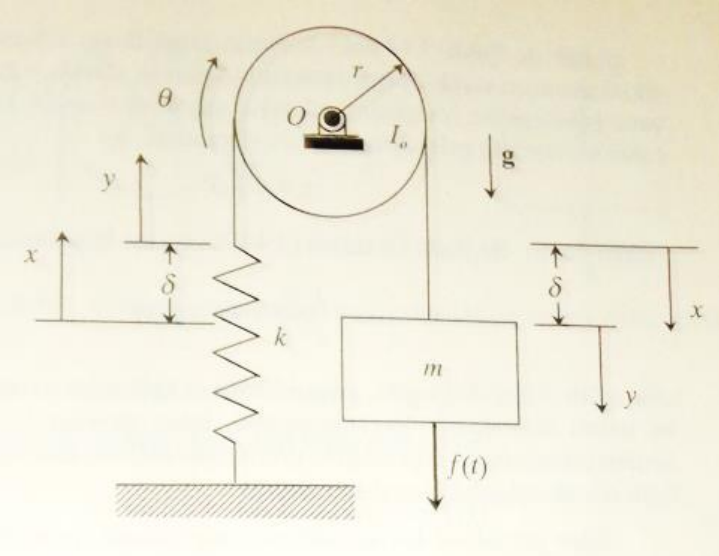
Enerji yöntemi

$$E_T = \frac{1}{2} k \theta^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$\frac{dE_T}{dt} = P = T \cdot \dot{\theta}$$

$$k \cdot \theta \cdot \dot{\theta} + I \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} = T \cdot \dot{\theta}$$

$$\underline{\underline{T = k \theta + I \ddot{\theta}}}$$



$$(F(t) - kx)r = I_0 \ddot{\theta}$$

$$f(t) + mg - F(t) = m \cdot \ddot{x}$$

$$x = r\theta, \quad \dot{x} = r\dot{\theta}$$

$$\ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

$$\left. \begin{aligned} \cancel{F(t)} - kx &= I_0 \cdot \frac{\ddot{x}}{r^2} \\ f(t) + mg - \cancel{F(t)} &= m\ddot{x} \end{aligned} \right\} f(t) + mg - kx = \left(\frac{I_0}{r^2} + m\right) \ddot{x}$$

$$\left(\frac{I_0}{r^2} + m\right) \ddot{x} + kx = f(t) + mg$$

$$\left(\frac{I_0}{r^2} + m\right) \ddot{y} + ky = f(t)$$

$$x = y + \delta$$

esitligi kullanarak

= Enerji Yöntemi =

$$E_k = \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{\dot{y}}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

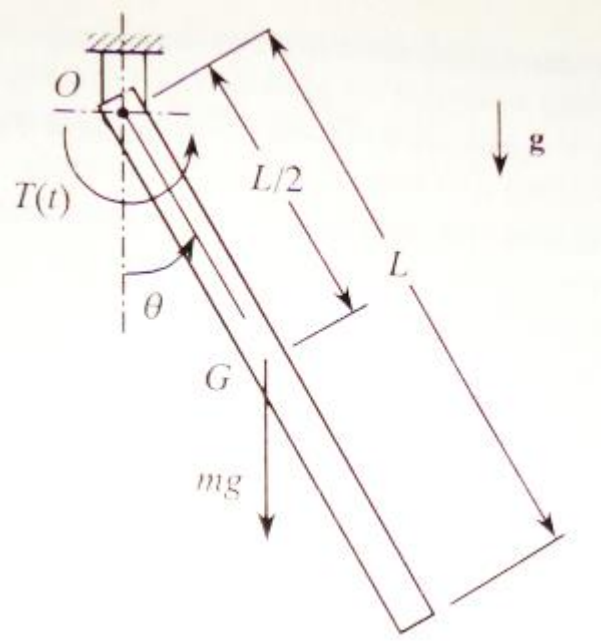
$$E_p = \frac{1}{2} k y^2$$

$$P = f(t) \dot{y}$$

$$\frac{d}{dt} E_t = P = f(t) \dot{y}$$

$$I \cdot \frac{\dot{y} \cdot \ddot{y}}{r^2} + m \dot{y} \cdot \ddot{y} + k y \cdot \dot{y} = f(t) \cdot \dot{y}$$

$$\left(\frac{I}{r^2} + m \right) \ddot{y} + k y = f(t)$$



$$\Sigma M_o = \bar{I}_o \ddot{\theta} \rightarrow \text{Newton 4.}$$

$$T(t) - mg \frac{L}{2} \sin \theta = \frac{1}{3} mL^2 \ddot{\theta}$$

$$T(t) = \frac{1}{3} mL^2 \ddot{\theta} + mg \frac{L}{2} \sin \theta$$

Enerji Yöntemi

$$E_k = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} mL^2 \dot{\theta}^2$$

$$E_p = mg \left(-\frac{L}{2} \cos \theta \right)$$

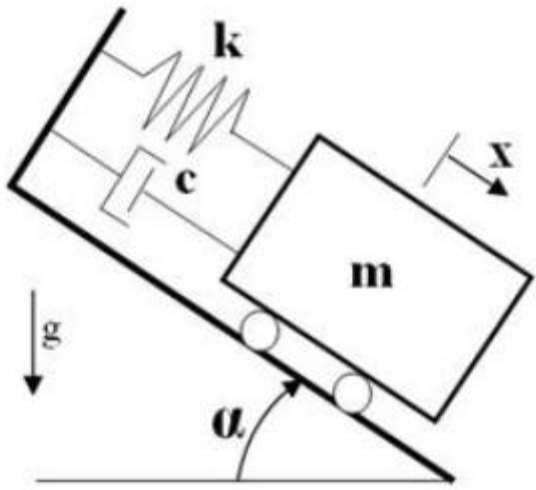
$$\frac{dE_T}{dt} = P = T(t) \cdot \dot{\theta}$$

$$\frac{mgL}{2} \dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{3} mL^2 \ddot{\theta} = T(t) \cdot \dot{\theta}$$

$$\frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} + \frac{mgL}{2} \sin \theta = T(t)$$

θ yazılabilir.

Sinüs fonksiyonu küçük açılarda açının radyan değerine yakın değerlere sahip olduğundan $\sin \theta = \theta$ yazılabilir.



Enerji Yöntemine göre

$$\frac{dE_T}{dt} = P - \frac{dW}{dx}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 - mgx \cdot \sin \alpha$$

$$W = c \cdot \dot{x} \cdot x$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 - mgx \sin \alpha \right) = P - \frac{d(c \cdot \dot{x} \cdot x)}{dx}$$

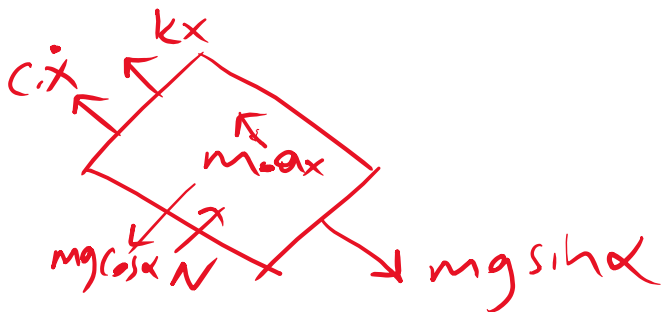
Newton

$$m \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} + kx \cdot \dot{x} - mg \dot{x} \sin \alpha = F \cdot \dot{x} - c \dot{x}^2$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F + mg \sin \alpha$$

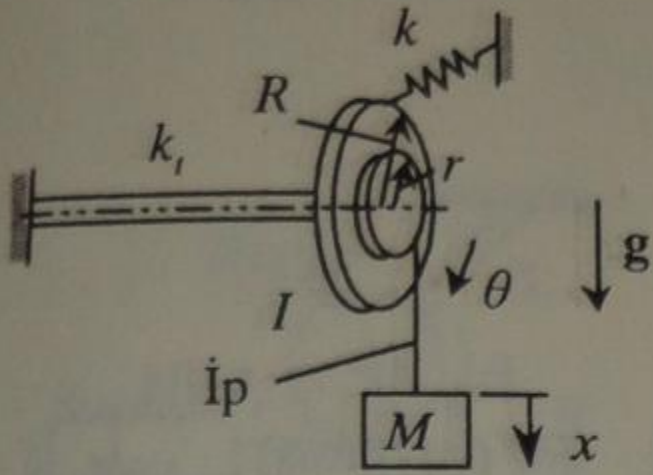
Sisteme F kuvveti etkisi olmadığında $F=0$ alınır.

$$\Sigma F_x = m a_x$$



$$mg \sin \alpha - kx - c\dot{x} = m a_x$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mg \sin \alpha$$



Newton

$$\Sigma M = I \ddot{\theta}$$

$$\Sigma F = m \cdot \ddot{x}$$

$$F_t \cdot r - k \cdot x \cdot R - k_t \cdot \theta = I \ddot{\theta}$$

$$mg - F_t = m \cdot \ddot{x}$$

$$F_t = \frac{I \ddot{\theta} + kxR + k_t \theta}{r} \quad mg - \frac{I \ddot{\theta} + kxR + k_t \theta}{r} = m \cdot \ddot{x}$$

$x = r \cdot \theta$ dönüşümü ile

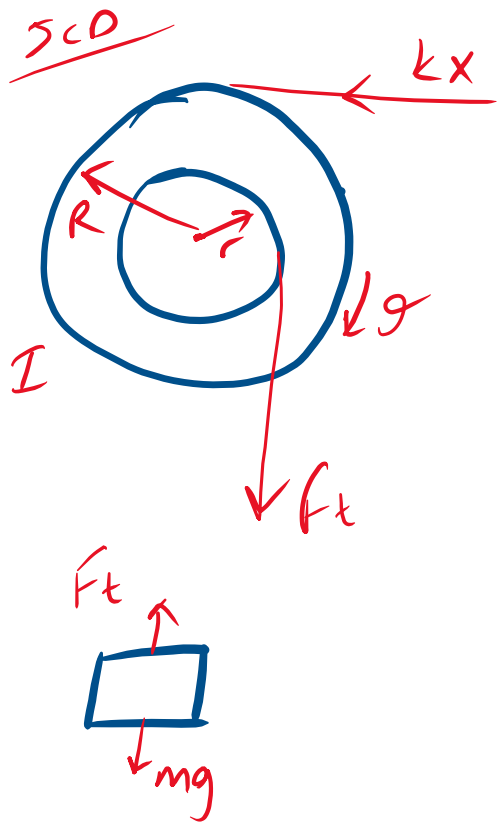
$$I = \frac{mR^2}{2}$$

$$mg - \frac{mR^2 \ddot{x}}{2r} - kxR - k_t \frac{x}{r} = m \ddot{x}$$

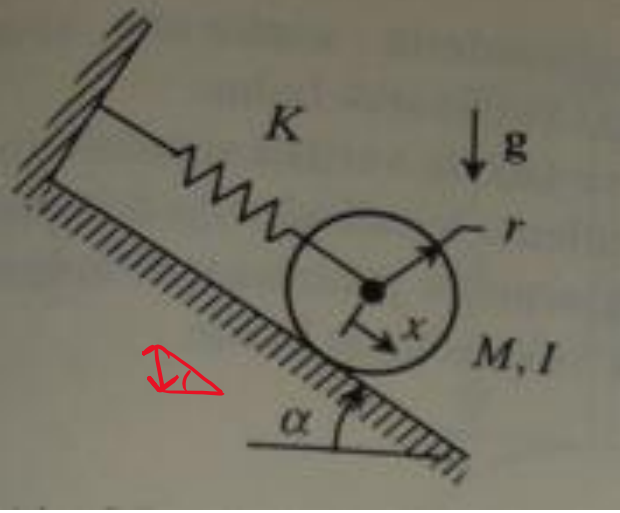
$$mg - \frac{mR \cdot \ddot{x}}{2r} - \frac{kxR}{r} - \frac{k_t x}{r^2} = m \ddot{x}$$

$$\ddot{x} \cdot m \cdot \left(\frac{R}{2r} + 1 \right) + x \left(\frac{kR}{r} + \frac{k_t}{r^2} \right) = mg$$

$$\text{dengül frekansı, } \omega_n = \sqrt{\frac{2(kRr + k_t)}{Rr + 2r}}$$



Enerji Yöntemi



$$x = 0 \text{ i.r.}$$

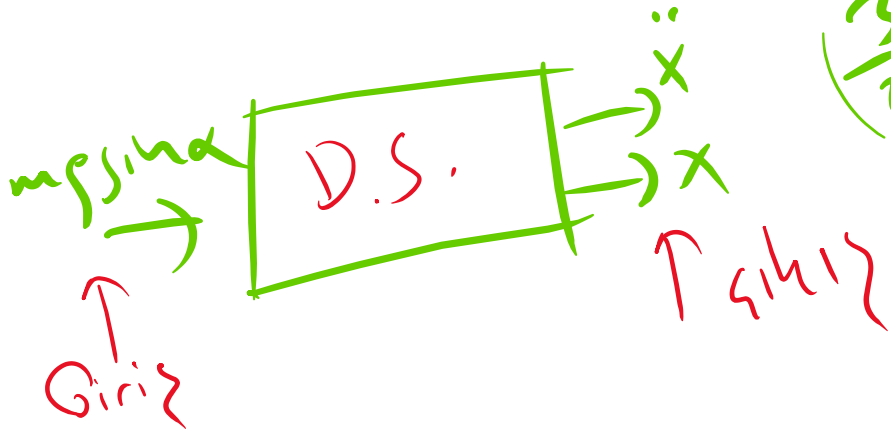
$$\dot{x} = \omega \cdot r$$

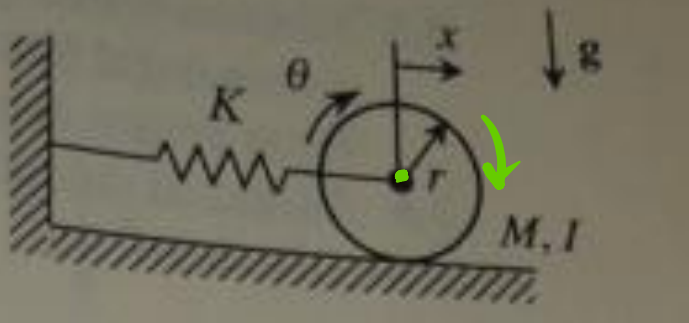
$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{m \cdot r^2}{2} \frac{\dot{x}^2}{r^2} + \frac{1}{2} k x^2 - m g x \sin \alpha \right) = F \cdot \dot{x}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 - m g \cdot x \sin \alpha \quad m \dot{x} \cdot \ddot{x} + \frac{m}{2} \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} + k x \cdot \dot{x} - m g \dot{x} \sin \alpha = F \dot{x}$$

$$\left(\frac{3}{2} m \cdot \ddot{x} + k x - m g \sin \alpha \right) = 0 \quad \text{D'Alembert}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$





$$\dot{x} = r \cdot \dot{\theta}$$

$$I = \frac{1}{2} m r^2$$

$$\frac{2}{3} m r^2$$

$$\frac{2}{3} m r^2$$

$$E_T = \frac{1}{2} m \cdot (r \cdot \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m r^2}{2} \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k \cdot (r \cdot \theta)^2$$

$$\frac{d}{dt} E_T = P = F \cdot \dot{\theta}$$

$$m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + \frac{m r^2}{2} \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + k \cdot r^2 \cdot \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\frac{3}{2} m \cdot r^2 \cdot \ddot{\theta} + k \cdot r^2 \cdot \theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

$$E_T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$k x = \frac{1}{2} k \frac{x^2}{r} = \frac{1}{2} k \cdot (r \theta)^2$$