KARARLILIK

Bir sistemin sınırlı her girişe cevabı sınırlı ise o sistem **kararlıdır.**

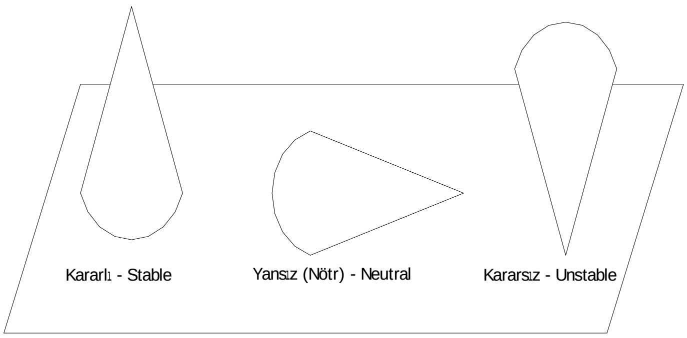
Karalılığın farklı tanımları:

Kararlı bir sistem bir bozucu giriş karşısında geçici durum davranışını gösterdikten sonra tekrar denge konumuna geri dönen sistemdir.

Bir sistemin impuls cevabı zaman sonsuza giderken sıfıra yaklaşırsa, o sistem **kararlıdır**.

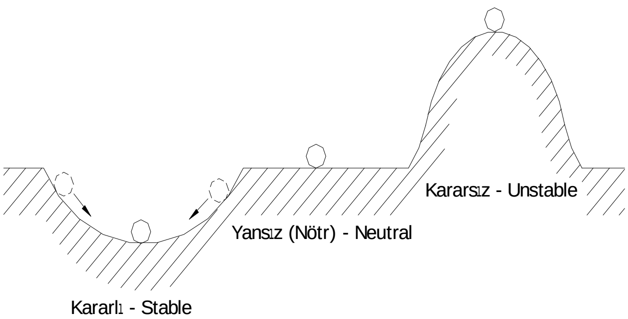
Sisteme giriş, referans değerinden veya bozucu değerden olabilir.

Kararlılık kavramı bir dik koni yardımıyla açıklanabilir. Tabanı üzerinde oturan koninin tepesine hafifçe dokunulursa koni hemen yine başlangıçtaki denge konumuna gelir. Bu durum **kararlı** davranışa örnektir. Yan yüzü üzerinde yatık duran koni hafifçe dokunulunca yan yüzü üzerinde yuvarlanır ve yine yan yüzü üzerinde kalır. Bu durum **yansız (nötr) kararlılığı** göstermektedir. Tepesi üzerinde, tabanı yukarı gelecek şekilde tutulan koni ise bırakılınca yan kenarı üzerine düşer. Bu hale ise **kararsız** hal denir.



Kararlılık kavramının dik koni ile temsili

Kararlılık kavramı şekilde verilen bir bilyenin hareketi ile de açıklanabilir.



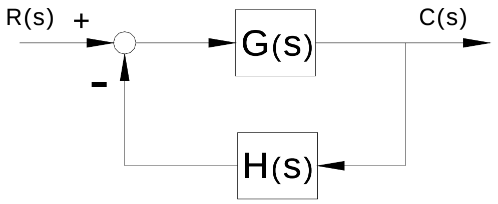
Kararlılık kavramının bir bilyenin hareketi ile temsili

Bir dinamik sistemin kararlılığı da benzer şekilde açıklanabilir. Sistemin bir girişe cevabı sürekli artıyorsa veya büyüyen genlikli bir titreşim şeklinde ise kararsızlık mevcuttur. Böyle kararsız çalışmada, sistemde doyma olmazsa veya mekanik olarak durdurulmazsa sistem sonunda tahrip olabilir; çünkü fiziksel bir sistemin cevabı sonsuza kadar artamaz. Sistem cevabı düzgün veya küçülen genlikli titreşim şeklinde azalıyorsa kararlılık vardır.

Lineer kontrol sistemlerinin kararlılığı, kapalı çevrim transfer fonksiyonunun kutuplarından, diğer deyişle karakteristik denklemin köklerinden incelenebilmektedir.

Bir sistemin kararlı olup olmadığı o sistemin kendisine ait bir özelliktir ve referans giriş dahil sistem giriş fonksiyonlarından bağımsızdır. Bir sistemin giriş fonksiyonunun kutupları sistemin kararlılığına etkimez, sadece daimi rejim cevabı üzerinde etkili olur.

Kapalı çevrimli bir lineer kontrol sisteminin blok diyagramı ve transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir:



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

Bu sisteme $r(t)=\delta(t)$, $R(s)=\mathscr{L}\left[r(t)\right]=1$ şeklinde impuls giriş yapılıyor.

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\ ...\ +b_m}{a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+\ ...\ +a_n} \quad \text{olur.}$$

Karakteristik denklem A(s)=0 olup açık yazılırsa

$$A(s)=a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+a_2 s^{n-2}+\ ...\ +a_n \quad \text{olur.}$$

s bir kompleks değişkendir ve en genel halde $s = r + j\,\omega$ (r: gerçel kısım, $j\omega$: sanal kısım) ile gösterilir.

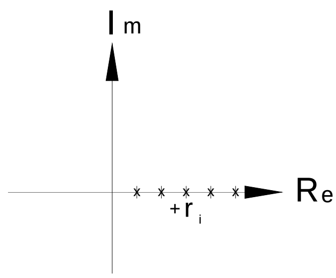
$A(s)$ polinomu n. inci mertebeden olduğu için s_1 , s_2 , s_3 , ... , s_n olmak üzere n adet kökü vardır. $A(s)=(s-s_1)(s-s_2)\ ...\ (s-s_n)$ yazılabilir. Burada mevcut 3 hal vardır.

a) s_i köklerinin tamamı pozitif gerçek olsun.

Yani $s_1=r_1$, $s_2=r_2$, ... , $s_n=r_n$ olsun.

$A(s)=(s-s_1)(s-s_2)\ ...\ (s-s_n)$

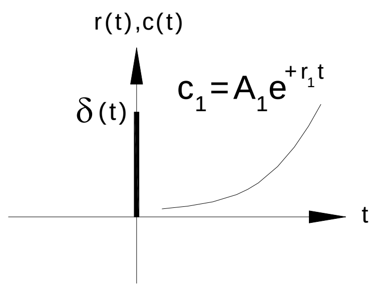
$A(s)=(s-r_1)(s-r_2)\ ...\ (s-r_n)$ şeklinde yazılabilir.



$$C(s)=\frac{A_1}{(s-r_1)}+\frac{A_2}{(s-r_2)}+\ ...\ +\frac{A_n}{(s-r_n)} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} c(t)=A_1e^{+r_1t}+A_2e^{+r_2t}+..........+A_ne^{+r_nt}$$

bulunur. Bu durumda yani s köklerinin tamamı pozitif gerçel ise sistemin c(t) cevabı üstel artan bir eğri olduğundan $r(t)=\delta(t)$ şeklinde sınırlı bir girişe sistemin verdiği cevap sınırsız artan bir eğridir.

O halde sistem KARARSIZDIR.

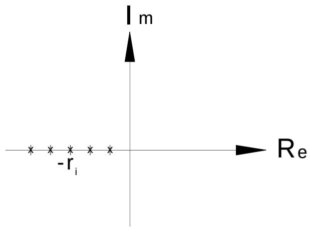


b) s_i köklerinin tamamı negatif gerçek olsun.

Yani $s_1 = -r_1$, $s_2 = -r_2$,.........., $s_n = -r_n$ olsun.

$A(s) = (s - s_1)(s - s_2)..........(s - s_n)$

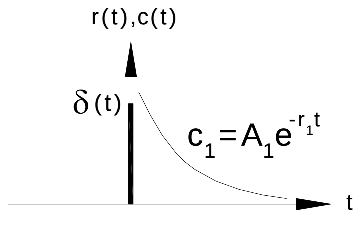
$A(s) = (s + r_1)(s + r_2)..........(s + r_n)$ şeklinde yazılabilir.



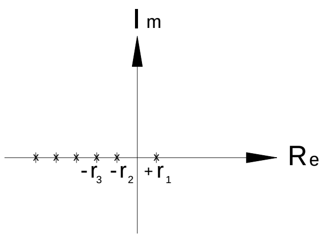
$$C(s) = \frac{A_1}{s + r_1} + \frac{A_2}{s + r_2} + \ ... \ + \frac{A_n}{s + r_n} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} c(t) = A_1 e^{-r_1 t} + A_2 e^{-r_2 t} + \ ... \ + A_n e^{-r_n t}$$

Bu durumda yani s köklerinin hepsi negatif gerçel ise sistemin c(t) cevabı üstel azalan bir eğri olmaktadır. Yani $\delta(t)$ sınırlı girişine cevap sınırlıdır.

O halde sistem KARARLIDIR

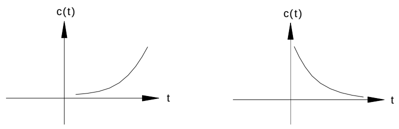


c) Köklerin sadece biri $(s_1 = +r_1)$ pozitif, diğer hepsi $(s_2 = -r_2, ..., s_n = -r_n)$ negatif gerçek olsun.



$A(s) = (s - s_1)(s - s_2)..........(s - s_n)$

$A(s) = (s - r_1)(s + r_2)..........(s + r_n)$



$$C(s) = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s + r_2} + ... + \frac{A_n}{s + r_n} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} c(t) = \underbrace{A_1 e^{+r_1 t}}_{\substack{zamanla \\ gitgide büyür}} + \underbrace{A_2 e^{-r_2 t} + ... + A_n e^{-r_n t}}_{zamanla\ yok\ olurlar}$$

O halde bir tane kök dahi pozitif ise, sistem KARARSIZ olacaktır.

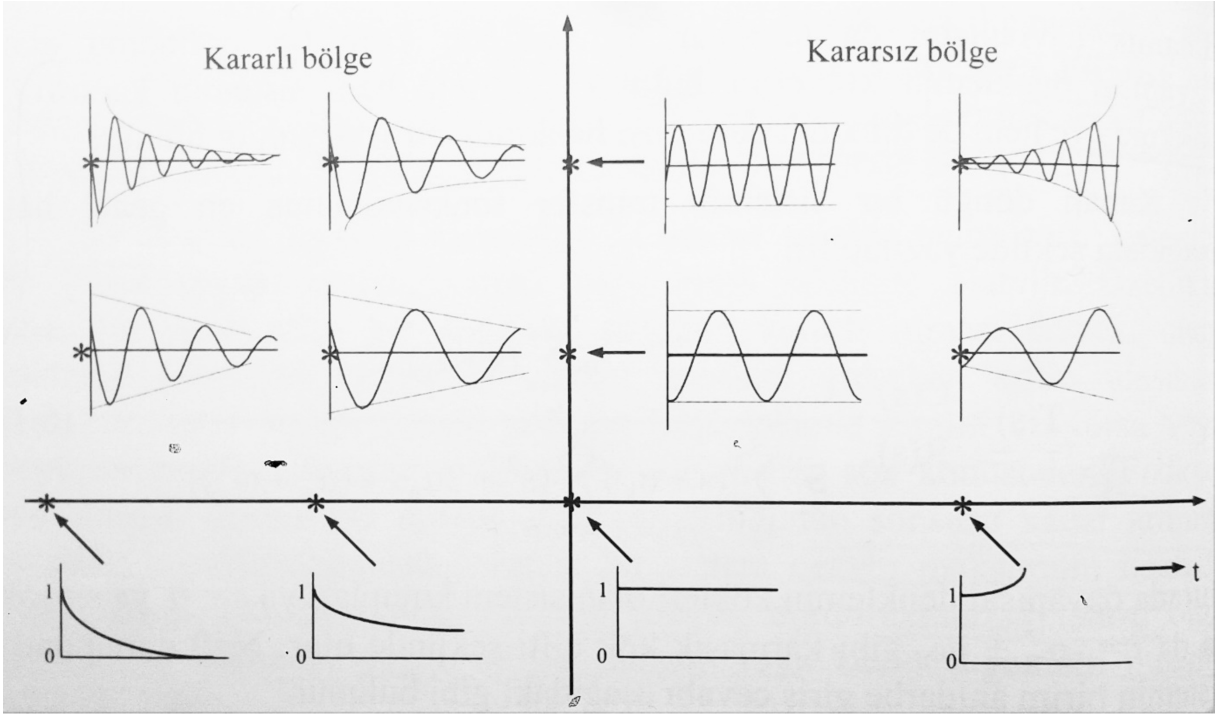
Kararlı bir çalışma için karakteristik denklemin bütün kökleri s düzleminin sol yarısında bulunmalıdır. Bu kararlılığa **mutlak kararlılık** denir.

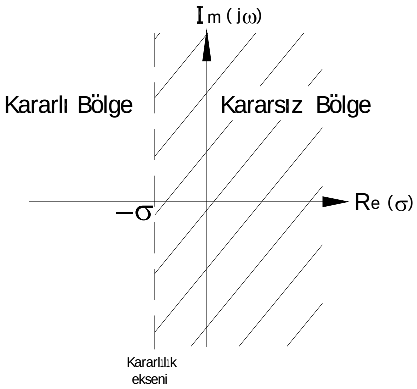
Mutlak Kararlılık, İzafi Kararlılık, Kararlılık ekseni

Kararlı bir çalışma için karakteristik denklemin bütün kökleri s düzleminin sol yarısında bulunmalıdır. Bu kararlılığa MUTLAK KARARLILIK denir.

Sanal eksen üzerindeki $\pm j\omega$ gibi bir imajiner eşlenik kök çifti sabit genlikli titreşim cevabı verir. Bu durumda sistem **kararlılık sınırındadır** ve bu durum arzu edilmez.

Sanal-Reel eksen takımından sola doğru sanal eksenden uzaklaştıkça kararlılık izafi olarak artar. Kararlılığın izafi olarak kuvvetli olması istenir. Bunun için imajiner eksenin solunda $-\sigma$ mesafesinden çizilen düşey doğru izafi kararlılık ekseni olarak kabul edilir ve karakteristik denklemin köklerinin bu yeni eksenin solunda olması **izafi kararlılığı** garantiler.





Routh-Hurwitz Kararlılık Ölçütü

Routh Kararlılık Ölçütü bir polinom denklemin pozitif gerçel kısımlı kökleri bulunup bulunmadığını, denklemi çözmeden belirlemeye yarar.

Bir polinomun bütün köklerinin $I_m - R_e$ eksen takımının sol yarısında olmasının GEREK ŞARTI; polinomun bütün katsayılarının sıfırdan farklı ve pozitif olmasıdır. YETER ŞART ise şu şekilde bulunur:

Örnek: $a_0 s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + a_5 = 0$

s^5:	a_0	a_2	a_4
s^4:	a_1	a_3	a_5
s^3:	b_1	b_2	0
s^2:	c_1	c_2	
s^1:	d_1	0	
s^0:	e_1	0	

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \qquad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \qquad c_2 = \frac{b_1 a_5 - \cancel{a_1 0}}{b_1} = a_5$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$e_1 = \frac{d_1 c_2 - \cancel{c_1 0}}{d_1}$$

Katsayılar tablosunun 1. sütunu sistemin kararlılığının belirlenmesine yarar. 1. sütundaki bütün sayıların işaretleri aynı ise karakteristik denklemin bütün kökleri $I_m - R_e$ eksen takımının sol tarafındadır. O halde sistem KARARLIDIR. Bu kararlılık YETER ŞART'tır.

1. sütundaki işaret değiştirme sayısı kadar sistemin $I_m - R_e$ eksen takımının sağ tarafında kökü vardır. Bu durumda ise sistem KARARSIZ olur.

ÖRNEK 1:

3. dereceden bir denklemin bütün köklerinin negatif gerçel kısımlı olmasının YETER ŞARTını bulunuz.

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

$$\begin{array}{lll}
s^3: & a_0 & a_2 \\
s^2: & a_1 & a_3 \\
s^1: & \dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & 0 \\
s^0: & a_3 &
\end{array}$$

$\dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} > 0$ $\quad a_1 a_2 > a_0 a_3$ olmalı.

ÖRNEK 2:

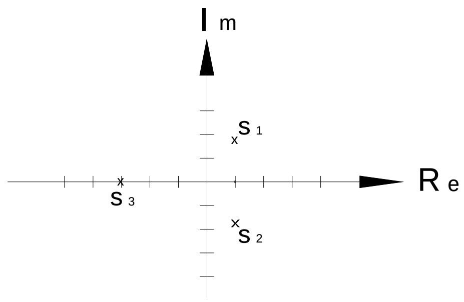
$s_1 = +1 + j\sqrt{7}$, $\quad s_2 = +1 - j\sqrt{7}$, $\quad s_3 = -3$ Bu sistem kararsız olmasına rağmen

$$(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) = \left(s - 1 - j\sqrt{7}\right)\left(s - 1 + j\sqrt{7}\right)\left(s + 3\right) = s^3 + s^2 + 2s + 24 = 0$$

Bütün katsayılar pozitif ve sıfırdan farklı, GEREK ŞART sağlanıyor ama YETER ŞART sağlanmıyor.

$$\begin{array}{lll}
s^3: & 1 & 2 \\
s^2: & 1 & 24 \\
s^1: & -22 & \\
s^0: & 24 &
\end{array}$$

$$\frac{2 - 24}{2} = -22$$



Birinci sütunda iki kez işaret değişmesi olması iki tane kökün $I_m - R_e$ eksen takımının sağ tarafında olduğunu gösterir. Sistem KARASIZDIR.

ÖRNEK 3:

$100s^3 + 80s^2 + 17s + 6 = 0$

GEREK ŞART sağlanıyor, YETER ŞART araştırılmalı.

$s^3:$	100	17
$s^2:$	80	6
$s^1:$	$760/80$	0
$s^0:$	6	

Birinci sütunda işaret değişmesi yoktur, o halde karakteristik denklemin imajiner eksenin sağında kökü yoktur, bütün kökler sol taraftadır ve sistem KARARLIDIR.

ÖZEL HALLER 1:

Routh tablosunda herhangi bir satırdaki birinci sütun terimi sıfır olabilir. Eğer bu satırın diğer terimleri sıfırdan farklı ise, sıfır terimi çok küçük pozitif sayı olan ε ile değiştirilerek hesap yapılır.

ÖRNEK 4:

$s_{1,2} = \pm j, \quad s_3 = -2$

$(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) = (s - j)(s + j)(s + 2) = (s^2 + 1)(s + 2) = s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$

$s^3:$	1	1
$s^2:$	2	2
$s^1:$	$0 \approx \varepsilon$	
$s^0:$	2	

Eğer sıfır (ε) teriminin üstündeki ve altındaki sayıların işaretleri aynı ise, imajiner bir kök çifti var demektir. Gerçekten de $s_{1,2} = \pm j$ de eşlenik bir çift kök vardır. Sistem KARARLILIK SINIRINDADIR.

ÖRNEK 5:

Transfer fonksiyonu verilen sistemin karalılık durumunu araştırınız.

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

$s^5:\ (+)$	1	3	5
$s^4:\ (+)$	2	6	3
$s^3:\ (+)$	$0 \approx \varepsilon$	$7/2$	0
$s^2:\ (-)$	$\dfrac{6\varepsilon - 7}{\varepsilon}$	3	0
$s^1:\ (+)$	$\dfrac{42\varepsilon - 49 - 6\varepsilon^2}{12\varepsilon - 14}$	0	
$s^0:\ (+)$	3		

Birinci sütunda iki kez işaret değişmesi vardır. O halde sistemin sağ yarı s-düzleminde 2 kökü vardır. Sistem KARASIZDIR.

ÖRNEK 6:

$$s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s \ + 3 = 0$$

Bu polinomun kökleri: $s_{1,2} = -0.09057 \pm j0.902$, $s_{3,4} = 0.4057 \pm j1.2928$

$s^4:$	1	2	3
$s^3:$	1	2	0
$s^2:$	$0 \approx \varepsilon$	3	
$s^1:$	$\dfrac{2\varepsilon - 3}{\varepsilon} \approx -\dfrac{3}{\varepsilon}$	0	
$s^0:$	3		

Birinci sütunda iki kez işaret değişmesi olması iki tane kökün $I_m - R_e$ eksen takımının sağ tarafında olduğunu gösterir. Sistem KARASIZDIR.

ÖZEL HALLER 2:

Eğer Routh tablosunda hesaplanan bir satırın tüm elemanları sıfır çıkarsa, bu durumda $I_m - R_e$ eksen takımında eşit büyüklükte ters işaretli iki gerçel kök , sanal kök çifti , iki adet karmaşık kök çifti veya bunların bir kaçı bir arada mevcut olduğu anlaşılır. O zaman, tablonun diğer satır ve sütun sayılarını hesaplayabilmek için bir yardımcı polinom teşkil edilir. Bu yardımcı polinomun katsayıları, elemanları sıfır olan satırdan bir önceki satırın katsayılarıdır. Polinom ilgili satırdaki s'in derecesi ile başlar ve birer atlayarak devam eder. Yardımcı polinomun türevi alınarak bu türevin alınması sonucu oluşan polinomun katsayıları, sıfırlı satırın sıfırları yerine konur. Burada bahsi geçen eşit büyüklükte ve ters işaretteki kökler ise bu yardımcı polinomun çözümünden elde edilebilir.

ÖRNEK 7:

$$s^5 + 3s^4 + 10s^3 + 16s^2 + 24s + 16 = 0$$

$$\begin{array}{llll}
s^5: & 1 & 10 & 24 \\
s^4: & 3 & 16 & 16 \\
s^3: & \dfrac{30-16}{3} & \dfrac{72-16}{3} & 0
\end{array} \Rightarrow \quad \frac{30-16}{3} = \frac{14}{3} \;,\; \frac{72-16}{3} = \frac{56}{3} = 4\left(\frac{14}{3}\right)$$

$$\Downarrow$$

Bir satırın elemanlarının hepsinin aynı sabit sayı ile bölünmesi ROUTH ölçütünü etkilemez ve kolaylık için bu bölme işlemi yapılır. s^3 'e ait satır 14/3 'e bölündü.

$$\begin{array}{llll}
s^5: & 1 & 10 & 24 \\
s^4: & 3 & 16 & 16 \\
s^3: & 1 & 4 & 0 \\
s^2: & \dfrac{16-12}{1} & \dfrac{16-0}{1} & 0
\end{array} \Rightarrow \quad \frac{16-12}{1} = 4 \;,\; \frac{16-0}{1} = 4(4)$$

$$\Downarrow$$

s^2 'ye ait satır 4 'e bölündü.

$$\begin{array}{llll}
s^5: & 1 & 10 & 24 \\
s^4: & 3 & 16 & 16 \\
s^3: & 1 & 4 & 0 \\
s^2: & 1 & 4 & 0 \\
s^1: & 0 & 0 & \\
s^0: & & &
\end{array}$$

s^1 'e ait satırdaki bütün elemanlar sıfır bulundu. Yardımcı polinom teşkil edelim.

$$P(s) = s^2 + 4 = 0 \;,\quad \frac{dP(s)}{ds} = 2s$$

$$\begin{array}{llll}
s^5: & 1 & 10 & 24 \\
s^4: & 3 & 16 & 16 \\
s^3: & 1 & 4 & 0 \\
s^2: & 1 & 4 & 0 \\
s^1: & 2 & 0 & \Leftarrow \quad \dfrac{dP(s)}{ds} = 2s'in\,katsayıları\,yazılır. \\
s^0: & 4 & &
\end{array}$$

Birinci sütunda işaret değişmesi yoktur. Ancak yardımcı denklemin çözümünden $P(s) = s^2 + 4 = 0$, $s = \pm 2j$ bulunması, sistemin bu köklerden dolayı sabit genlikli titreşim yapacağını gösterir. O halde sistem KARARLILIK SINIRINDADIR.

ÖRNEK 8:

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56}$$

$$\begin{array}{llll} s^5: & 1 & 6 & 8 \\ s^4: & \cancel{7}\ 1 & \cancel{42}\ 6 & \cancel{56}\ 8 \\ s^3: & 0 & 0 & 0 \\ s^2: & & & \\ s^1: & & & \\ s^0: & & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{llll} s^5: & 1 & 6 & 8 \\ s^4: & 1 & 6 & 8 \\ s^3: & \cancel{4}\ 1 & \cancel{12}\ 3 & 0 \\ s^2: & 3 & 8 & \\ s^1: & \frac{1}{3} & 0 & \\ s^0: & 8 & & \end{array}$$

$$s^4 + 6s^2 + 8 = 0 \qquad \frac{dP(s)}{ds} = 4s^3 + 12s$$

$$s^2 = x$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-6 \mp \sqrt{36-32}}{2} \begin{cases} -4 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow s^2 = x \begin{cases} \mp 2j \\ \mp \sqrt{2}j \end{cases}$$

O halde sistem KARARLILIK SINIRINDADIR.

ÖRNEK 9:

$$F(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + K$$

$$\begin{array}{llll} s^4: & 1 & 1 & K \\ s^3: & 1 & 1 & 0 \\ s^2: & 0 \approx \varepsilon & K & \\ s^1: & \frac{\varepsilon - K}{\varepsilon} & 0 & \\ s^0: & K & & \end{array}$$

$$\varepsilon > 0$$

$$\varepsilon - K > 0 \qquad K < \varepsilon$$

$$K < 0$$

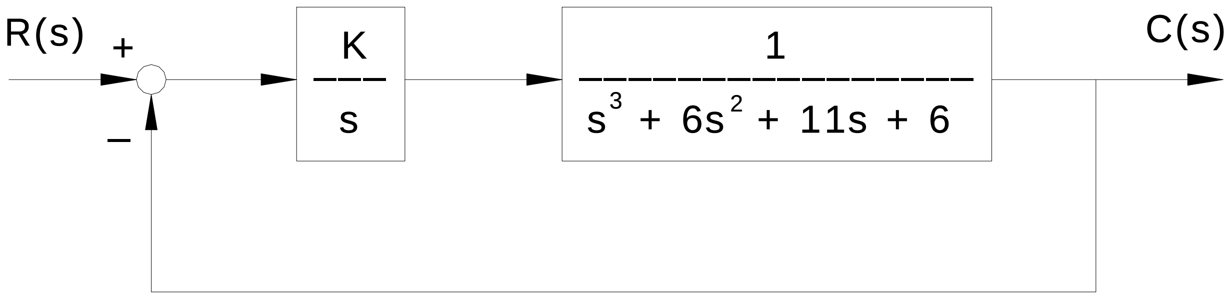
$K>0 \qquad \varepsilon>0 \qquad \Rightarrow$ o zaman

$s^1: \qquad \frac{-K}{\varepsilon}<0$

Bu durumda sistem K'nın her değeri için KARARSIZ olur.

ÖRNEK 10

İntegral kontrolün uygulandığı bu sistem K'nın hangi değerleri için kararlı olur. (Not: Kontrol edilen sistem 3. dereceden olduğundan K'nın belli değerleri için kararlıdır)



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\frac{K}{s}\frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}}{1+\frac{K}{s}\frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{s\left(s^3+6s^2+11s+6\right)+K}$$

Not: Bu örnekten kararlı bir çalışma için muhakkak en dıştaki beslemenin negatif geri besleme olması gerektiği anlaşılmaktadır. <u>**Aksi halde GEREK ŞART sağlanamaz.**</u>

Karakteristik Denklem: $s^4+6s^3+11s^2+6s+K=0$
Gerek şart için $K>0$ olmalı.
Yeter şartı bulalım.

s^4:	1	11	K
s^3:	6	6	0
s^2:	10	K	
s^1:	$(60-6K)/10$	0	
s^0:	K		

$(60-6K)/10 \qquad \Rightarrow \qquad K<10$ olmalı.

O halde kararlı bir çalışma için $0<K<10$ olmalıdır.

Sayfa 128:
2.36
2.37