TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009 | TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ | SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

Kontrol Sistemleri Ders Notu

Dr. Hakan TERZİOĞLU

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009 | TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ | SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

Ders İçerik Bilgisi

- Sistem Davranışlarının Analizi
  1. Geçici durum analizi
  2. Kalıcı durum analizi
- MATLAB'da örnek çözümü

Dinamik Sistemlerdeki Davranışlar

Geçici Durum Davranışı

Bir sistemin geçici durum cevabı; sisteme bir giriş uygulandığında sistemin başlangıç durumundan son durağan durumuna ulaşıncaya kadar zamana bağlı olarak gösterdiği davranıştır.

Kalıcı (Kararlı) Durum Davranışı

Kalıcı durum cevabı; sistem geçici durum davranışını tamamladıktan sonra gösterdiği davranıştır. Başka bir deyişle, zaman sonsuza yaklaştıkça sistemin koruduğu davranışıdır.

Geçici ve Kalıcı Durum Davranışları

Bir sistemin cevabı geçici ve kalıcı durum cevabının toplamından oluşur ve aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$c(t) = c_{tr}(t) + c_{ss}(t)$$

c_{tr} : Geçici durum cevabı
c_{ss} : Kalıcı durum cevabı

Sistem Davranışlarının Analizi

- Geçici ve kalıcı durum cevapları, sistemlerin transfer fonksiyonları bulunduktan sonra incelenir.
- Geçici durum cevabı çözümlemesinden sistemlerin bir giriş uyarısına hangi hızla tepki gösterdikleri belirlenir.
- Cevap hızından sistemin hangi temel parametrelerine bağlı oldukları da belirlenmiş olur.
- Böylelikle uygun bir davranışa sahip olmayan otomatik kontrol sistemlerinden daha iyi bir davranış elde etmek için neler yapılabileceği ortaya çıkar.

Sistem Davranışlarının Analizi

- Bir sistemin cevabı (davranış şekli) hem o sistemin Transfer Fonksiyonuna hem de giriş fonksiyonuna bağlıdır.
- Sistemin belli bir giriş sinyali karşısında kalıcı durum hatası gösterip göstermeyeceği, sistemin açık döngü transfer fonksiyonunun tipine bağlıdır.
- Pratikte kontrol sistemlerinin girişi her zaman kolayca formüle edilebilen bir fonksiyon olmaz.
- Çoğunlukla gelişigüzel esaslı girişler kendini gösterir.
- Sistemi tanımak için sistemler bazı tipik giriş fonksiyonları ile denenir. Bu girişlere verdikleri tepkiler incelenir.

Sistem Davranışlarının Analizi

Bu amaçla sistemlere uygulanan giriş fonksiyonları şunlar olabilir;

a) Basamak fonksiyonu, $r(t)=Au(t)$

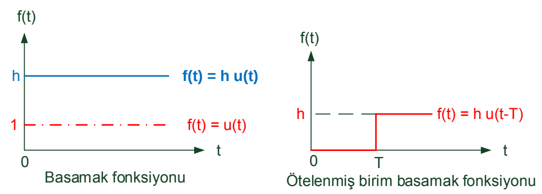
b) Rampa fonksiyonu, $r(t)=At$

c) İvme fonksiyonu, $r(t)=At^2/2$

d) İmpuls fonksiyonu, $r(t)=A\delta(t)$

e) Sinüs fonksiyonu, $r(t)=A\sin(\omega t)$ veya $r(t)=A\cos(\omega t)$
olarak seçilir.

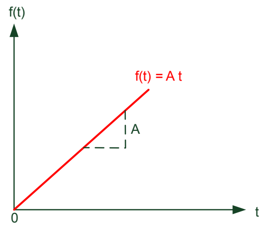
a. Basamak fonksiyonu



Bir kontrol sistemi, sürekli ve ani olarak sabit bir referans veya bozucu girişe maruz kalıyorsa, sistemi test etmek için basamak fonksiyonu seçilmelidir.

Sistemin cevap verme hızını ölçmede kullanılır.

b. Rampa fonksiyonu



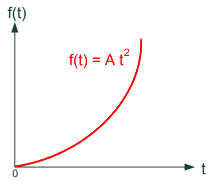
Rampa fonksiyonu

Eğer kontrol sistemine git gide artan bir giriş uygulanacaksa, kontrol sistemi rampa girişe göre incelenmelidir.

Rampa cevabı çıkışının girişi nasıl takip ettiğini göstermesi bakımından yararlıdır.

Rampa fonksiyonu sabit hızlı girişlerin pozisyon kontrolünde tercih edilir.

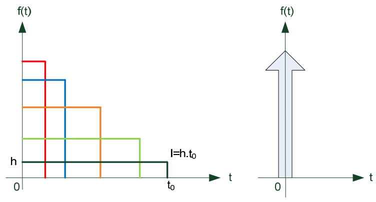
c. İvme (parabol) fonksiyonu



İvme (parabol) fonksiyonu

İvme (Parabol) fonksiyonu sabit ivmeli uygulamalarda kullanılır. Bir füzenin hareketinin izlenmesi gibi.

d. Ani darbe (impuls) fonksiyonu

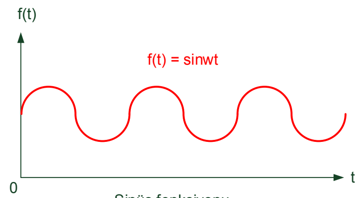


Ani darbe fonksiyonu

Ani darbe (şok) şeklinde bir girişe maruz kalan kontrol sistemi ise impuls giriş ile incelenmelidir.

Bu giriş fonksiyonu sistemin parametrelerini ve Transfer Fonksiyonunu deneysel olarak elde etme bakımından önemlidir.

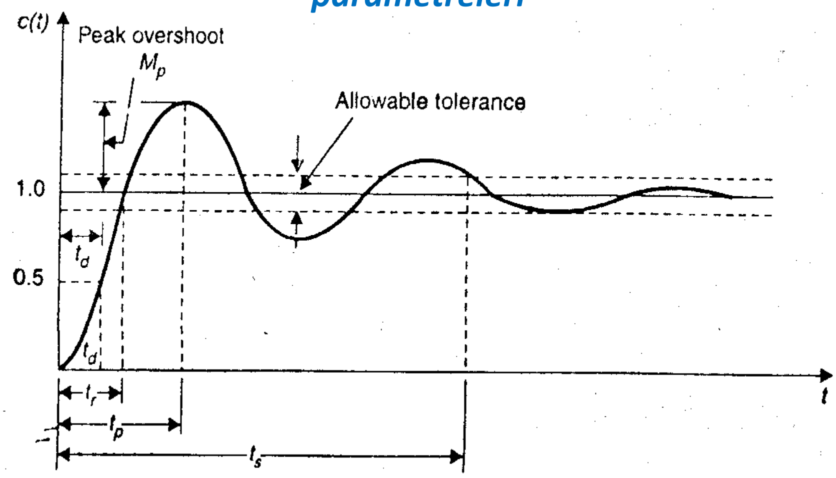
e. Sinüs fonksiyonu



Sinüs fonksiyonu

Sinüs fonksiyonu sistemlerin sürekli rejim davranışlarının incelenmesinde kullanılmaktadır.

Yüksek dereceli sistemlerin basamak cevabı parametreleri



TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
KONYA - 1975

Yüksek dereceli sistemlerin basamak cevabı parametreleri

1. Gecikme zamanı (*Delay time*) t_d:

Sistem cevabının istenilen nihai değerin %50’sine ilk varış zamanıdır.

$$t_d = \frac{1 + 0{,}7 \cdot \xi}{\omega_n}$$

2. Yükselme zamanı (*Rise time*) t_r:

Az sönümlü bir sistem için sistem cevabının 0’dan %100’e ilk ulaşması için geçen zamandır.

$$t_r = \frac{\pi - cos^{-1}\xi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$$

Yüksek dereceli sistemlerin basamak cevabı parametreleri

3. Zirve zamanı (*Peak time*) t_p:

Sistem cevabının maksimum aşma noktasına ulaştığı zamandır.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

4. Yerleşme (oturma) zamanı (*Settling time*) t_s:

Sistem cevabının nihai değere %2 veya %5 tolerans bandında ulaştığı ve yerleştiği zamandır. 4T veya 5T olarak alınabilir (T=zaman sabiti).

$$t_s = 5T = \frac{5}{\xi \cdot \omega_n}$$

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

Yüksek dereceli sistemlerin basamak cevabı parametreleri

5. Maksimum aşma (*Peak overshoot*) M_p:

Sistem çıkışının ulaştığı maksimum değer ile kararlı durum değeri arasındaki farkın normalize edilmesidir.

$$M_p = e^{\left(\frac{-\xi\cdot\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$$

Yüksek dereceli sistemlerin basamak cevabı parametreleri

Eğer yukarıda sözü edilen parametreler belirlenebilirse cevap eğrisinin şekli hemen hemen saptanabilir.

Burada tanımlanan tüm özelliklerin verilen herhangi bir duruma her zaman uygulanması gerekmez. Mesela aşırı sönümlü ikinci derece sistemler ile birinci derece sistemlerde tepe zamanı ve maksimum aşma tanımları uygulanmaz.

Sistem cevaplarının yeterince hızlı, kararlı durum hatalarının da olabildiğince küçük olması istenir. O nedenle 2. derece sistemlerde sönüm oranı olarak 0,4-0,8 arasında bir değer alınır.

Yüksek dereceli sistemlerin basamak cevabı parametreleri

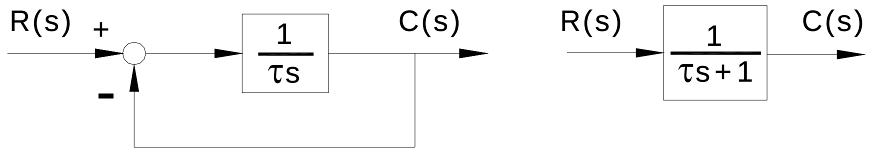
0,4'ten daha küçük sönüm oranında sistem cevabı aşırı salınımlı, maksimum aşma miktarı da o kadar yüksek olur.

0,8'den daha yüksek olduğunda ise sistem aşırı sönümlü ve yavaştır.

Sistemin aynı anda hem maksimum aşma hem de oturma zamanı değerleri küçük tutulamaz.

Eğer bunlardan biri küçük tutulursa diğerinin büyük tutulması gerekir.

Birinci Dereceden Sistemlerin Geçici ve Kalıcı Durum Cevabı



(a) Birinci derece bir sistemin blok diyagramı (b) İndirgenmiş Blok diyagram.

Şimdi, yukarıda verilen genelleştirilmiş bir birinci derece sistemin birim basamak giriş fonksiyonuna verdiği cevap incelenecektir.

Sistem değişkenlerinin başlangıç değerleri sıfır kabul edilmiştir.

Birinci Dereceden Sistemlerin Birim-Basamak Girişine Cevabı

Birim-basamak fonksiyonunun Laplace dönüşümü l/s'tir. Bu durumda R(s) = 1/s ifadesi, indirgenmiş blok diyagramındaki sistemin transfer fonksiyonunda yerine yazılırsa ve kısmı kesirlere ayırma yöntemi ile açılımı yapılırsa;

$$r(t)=u(t) \xrightarrow{L} R(s)=\frac{1}{s} \qquad G(s)=\frac{1}{\tau s+1}$$

$$C(s)=R(s)G(s) \qquad C(s)=\frac{1}{s}\frac{1}{\tau s+1}=\frac{A}{s}+\frac{B}{\tau s+1}$$

Burada $A=1,\ B=-\tau$ olarak bulunur. Buna göre;

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{\tau}{\tau s+1}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+(1/\tau)}$$

Denklemin ters Laplace dönüşümü alınarak sistemin zaman cevabı bulunur:

Birinci Dereceden Sistemlerin Birim-Basamak Girişine Cevabı

Denklemin ters Laplace dönüşümü alınarak sistemin zaman cevabı bulunur:

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{\tau}{\tau s+1}$$

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} c(t)=1-e^{-t/\tau}$$

Elde edilen eksponansiyel çıkış fonksiyonunun farklı zaman sabitlerinde ulaştığı değerler aşağıda verilmiştir.

Birinci Dereceden Sistemlerin Birim-Basamak Girişine Cevabı

$t=0$	$c(t)=1-\frac{1}{e^0}=0$
$t=\tau$	$c(t)=1-\frac{1}{e^1}=0.632$
$t=2\tau$	$c(t)=1-\frac{1}{e^2}=0.865$
$t=3\tau$	$c(t)=1-\frac{1}{e^3}=0.950$
$t=4\tau$	$c(t)=1-\frac{1}{e^4}=0.982$
....	....
....	....
$t=\infty$	$c(t)=1-\frac{1}{e^\infty}=1.0$

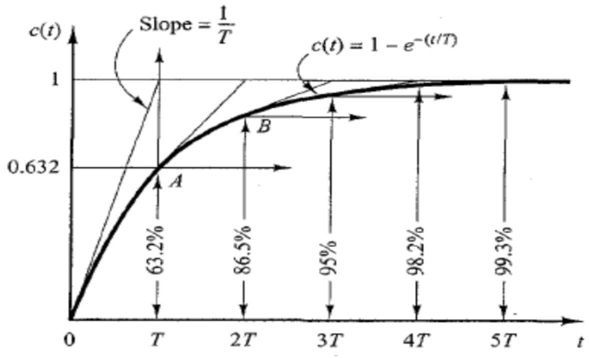
Sistem başlangıçta (t=0) durağandır. Sisteme basamak giriş uygulandığında sistem bir zaman sabiti sonra (t = τ) nihai değerinin % 63,2'sine ulaşır.

t = 3τ, 4τ, ve 5τ olduğunda sistem nihai değerinin sırasıyla % 95, % 98.2, ve % 99.3'ine ulaşmaktadır. (Aşağıdaki şekil). Görülmektedir ki t ≥ 4τ, olduğunda sistem nihai değerine 2% hata ile yaklaşmaktadır. Sistemin kalıcı duruma t=∞'da ulaştığı görülmektedir. Fakat pratikte kalıcı değere ulaşmak için bu kadar uzun bir süre beklenemez ve sistemin kalıcı durum değerine %2'lik bir hata bandında yaklaştığında sistemin durağan duruma ulaştığı yaklaşımı kabul edilebilir bir yaklaşımdır.

Not: Zaman sabiti τ ne kadar küçük olursa sistem o kadar hızlıdır.

Birinci Dereceden Sistemlerin Birim-Basamak Girişine Cevabı

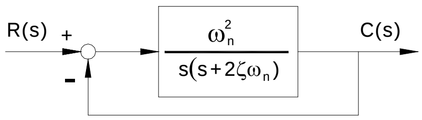
Birinci dereceden sistemin birim basamak girişe cevabı (T = t).



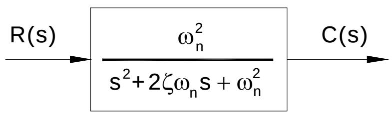
Şekil 6.2'deki eksponansiyel eğrinin önemli bir özelliği de $t = 0$ eğiminin $1/\tau$ olmasıdır.

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\tau}$$

İkinci Dereceden Sistemlerin Geçici ve Kalıcı Durum Cevabı



İkinci mertebeden bir sistemin kapalı çevrim blok diyagramı



Yandaki sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu

Yukarıdaki sistem standart ikinci derece sistem olarak adlandırılır. Bazı kaynaklar bu tarz sistemlere Titreşim tipi sistemler adını da vermektedir. Standart ikinci dereceden kapalı çevrim sistemin karakteristik denklemi:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Buradan sistemin kutupları aşağıdaki gibi bulunur:

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

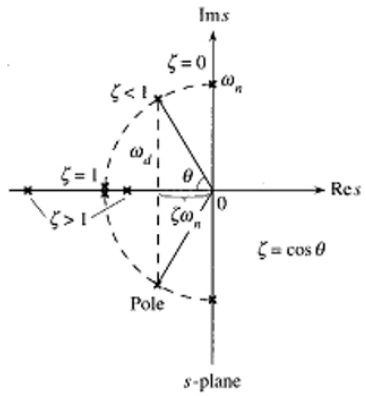
İkinci Dereceden Sistemlerin Geçici ve Kalıcı Durum Cevabı

Sönüm oranı ζ'ya bağlı olarak karakteristik denklemin kutupları 4 farklı kategoride incelenebilir.

1. Eğer $\zeta = 0$ ise, s_1 ve s_2 tamamen kompleks eşleniktir ($s_{1,2} = \mp j\omega_n$) ve geçici zaman cevabı sona ermez.
2. Eğer $0 < \zeta < 1$, Kapalı çevrim kutupları s_1 ve s_2 negatif gerçek kısmı olan komplex eşlenik kutuplardır ($s_{1,2} = -\sigma \mp j\omega_d$). Bu tarz sistemlere az sönümlü (***under damped***) sistemler adı verilir.
3. Eğer $\zeta = 1$, bu durumda sistem kritik sönümlüdür. Kapalı çevrim sistemin negatif ve gerçek katlı kutupları ($s_{1,2} = -\omega_n$).
4. $\zeta > 1$ durumunda fazla sönümlü sistem cevabı elde edilir. Sistemin kutupları negatif, farklı iki gerçek sayıdır ($s_{1,2} = -\sigma \mp \omega_d$).

İkinci Dereceden Sistemlerin Geçici ve Kalıcı Durum Cevabı

Aşağıdaki şekil, sönüm oranı ζ alternatiflerine bağlı olarak sistem kutupların durumunu s-düzlemi üzerinde göstermektedir.



Sönüm oranı ζ ile kapalı çevrim sistem kutupları arasındaki ilişki.

İkinci Dereceden Sistemlerin Birim-Basamak Girişine Cevabı

Sistem girişi r(t) = u(t)'dir. Bu durumda;

$$r(t)=u(t), \Rightarrow R(s)=\frac{1}{s};\quad Y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{1}{s}-\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

Y(s)'in ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$y(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t-e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t\cdot\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

İkinci Dereceden Sistemlerin Birim-Basamak Girişine Cevabı

Veya $y(t)=1-\dfrac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left[\sqrt{1-\zeta^2}\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t+\zeta\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t\right]$

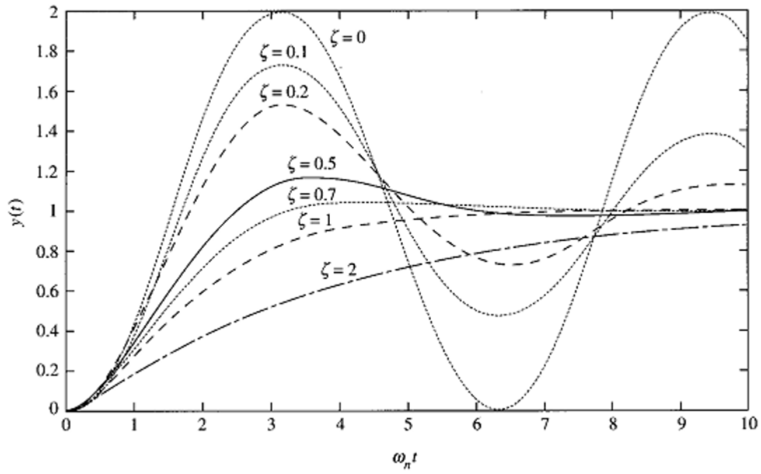
Veya $y(t)=1-\dfrac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\theta)$,

Burada

$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ ve $\theta=\tan^{-1}\left(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta\right)=\cos^{-1}\zeta$

Veya farklı bir gösterimle $y(t)=1-\dfrac{\omega_n}{\omega_d}e^{-\sigma t}\sin(\omega_d t+\theta)$.

İkinci Dereceden Sistemlerin Birim-Basamak Girişine Cevabı



2. dereceden sistemlerin farklı ζ değerlerinde birim basamak cevabı

Örnek 1:

Aşağıda transfer fonksiyonu verilen sistemin gecikme, yükselme, maksimum aşma ve yerleşme süreleri ile maksimum aşma değerini hesaplayınız.

$$TF = \frac{4}{s^2 + 3s + 4}$$

Çözüm:

$$TF = \frac{4}{s^2 + 3s + 4} = \frac{{w_n}^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot w_n \cdot s + {w_n}^2}$$

$${w_n}^2 = 4 \Longrightarrow w_n = 2\, rad/sn$$

$$2 \cdot \xi \cdot w_n = 3 \Longrightarrow \xi = 0{,}75$$

Gecikme zamanı;

$$t_d = \frac{1 + 0{,}7 \cdot \xi}{\omega_n} = \frac{1 + 0{,}7 \cdot 0{,}75}{2} = 0{,}7625 sn$$

Yükselme zamanı;

$\theta = cos^{-1} 0{,}75 = 0{,}723\, rad$ (Hesap makinesi radyan modunda!)

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 2\sqrt{1 - 0{,}75^2} = 1{,}323\, rad/sn$$

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - 0{,}723}{1{,}323} = 1{,}828\, sn$$

Maksimum aşmaya ulaşma zamanı;

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{1{,}323} = 2{,}375\, sn$$

Yerleşme zamanı;

$$t_s = 4T = \frac{4}{\xi \cdot \omega_n} = \frac{4}{0{,}75 \cdot 2} = 2{,}667\ sn$$

Maksimum aşma;

$$M_p = e^{\left(\frac{-\xi \cdot \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} = e^{\left(\frac{-0{,}75 \cdot \pi}{\sqrt{1-0{,}75^2}}\right)} = 0{,}028$$

Buna göre maksimum aşma % 2,8’dir.

Örnek 2:

Aşağıda transfer fonksiyonu verilen sistemin birim basamak cevabına ait eğriyi MATLAB ile çiziniz. Bu eğri üzerinde maksimum aşma değerini ve zamanını gösteriniz. Sönüm oranını ve doğal frekansı hesaplatınız.

$$GH(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4}$$

Çözüm:

Öncelikle transfer fonksiyonu girilir.

```
>> gh=tf(1,[1,1,4])

gh =

        1
   -----------
   s^2 + s + 4

Continuous-time transfer function.
```

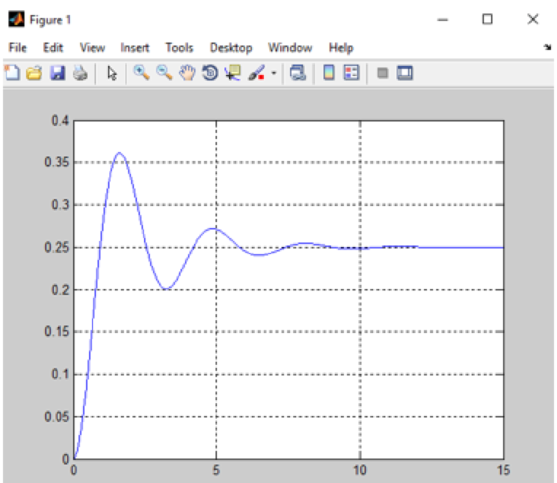
Basamak cevabını belli bir t aralığında hesaplatıp bunu y isimli bir değişkene atmak için aşağıdaki kod yazılır.

```
>> t=0:0.01:15;
>> y=step(gh,t);
```


Çözüm:

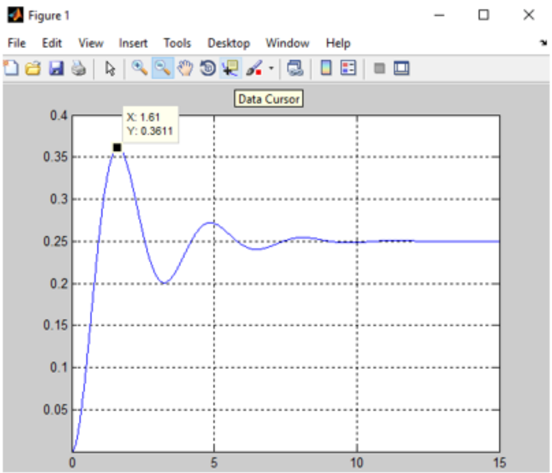
Elde edilen sayısal değerleri çizdirmek için aşağıdaki komutlar yazılmalıdır.

```
>> plot(t,y)
>> grid on
```



Çözüm:

Eğri üzerinden maksimum aşma değerini ve anını bulmak için (Data Cursor) kullanılır.



Çözüm:

Sönüm oranı ve doğal frekans değerleri ise:

```
>> [wn xsi]=damp(gh)

wn =

    2.0000
    2.0000


xsi =

    0.2500
    0.2500
```

Uygulanan giriş fonksiyonu birim basamak olduğundan $r(\infty) = 1$ 'dir. Ancak eğride $r(\infty) = 0{,}25$ olarak görülmektedir. Buna göre kalıcı durum hatası:

$$e_{ss} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

Ödev: Aşağıdaki yolu izleyerek Örnek 1 ve farklı transfer fonksiyonları için birim basamak cevaplarını elde ediniz. Sönüm oranı ve doğal frekans değerleri ile oynandığında eğride nasıl bir değişim olduğunu gözlemleyiniz.

```
%Öncelikle transfer fonksiyonu girilir.
gh=tf(1,[1,3.55,4])
%Basamak cevabını belli bir t aralığında hesaplatıp bunu
%y isimli bir değişkene atmak için aşağıdaki kod yazılır.
t=0:0.01:15;
y=step(gh,t);
%Elde edilen sayısal değerleri çizdirmek için aşağıdaki
%komutlar yazılmalıdır.
plot(t,y)
grid on
%Sönüm oranı (xsi) ve doğal frekans (wn) değerleri ise
%aşağıdaki gibi bulunur:
[wn xsi]=damp(gh)
```


Bu günlük bu kadar…

Teşekkürler