TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

Kontrol Sistemleri Ders Notu

Dr. Hakan TERZİOĞLU

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

Ders içerik bilgisi

- **TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ**
  1. *Tablo yöntemi*
  2. *Basit (kısmi) kesirlere ayırma yöntemi*
     - ❑ *Farklı reel köklere sahip ise*
     - ❑ *Reel ve katlı (tekrarlı) köklere sahipse*
     - ❑ *Karmaşık (kompleks) eşlenik köklere sahipse*
  3. *Ters Laplace integralinin çözümü ile gerçekleştirilen yöntem*
- **TERS LAPLACE Dönüşümü İçin MATLAB Kullanımı**
- **ÖRNEKLER**

Dr. Hakan TERZİOĞLU

TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

t domenindeki denklemi s domenine dönüştürüp çıkış değişkenlerini s'nin bir fonksiyonu olarak bulduktan sonra tekrar zaman (t) domenine dönüştürülmesi işlemine Ters Laplace Dönüşümü denir.

t>0 için f(t)'nin Laplace dönüşümü F(s) ise, t>0 için F(s)'nin ters Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)\, e^{st}\, dt$$

Pratikte bu denklemin çözümü zor olduğundan bunun yerine Laplace dönüşüm tabloları veya diğer bazı yöntemler kullanılır.

Ters Laplace yöntemi için kullanılan yöntemler şunlardır:

1. Tablo yöntemi
2. Basit (kısmi) kesirlere ayırma yöntemi
3. Ters Laplace integralinin çözümü ile gerçekleştirilen yöntem

1. Kısmi Kesirlere Ayırma Yöntemiyle Ters Laplace Dönüşümü

Ters Laplace dönüşümü yapılacak F(s) fonksiyonu basit fonksiyonlar dizisi şeklinde aşağıdaki gibi yeniden düzenlenir.

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) + \cdots + F_n(s)$$

Daha sonra her bir ifadenin ayrı ayrı ters Laplace dönüşümü alınır.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_3(s)\} + \cdots + \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \cdots + f_n(t)$$

Kontrol sistemi uygulamalarında F(s) fonksiyonu, aşağıda görüldüğü gibi s'nin fonksiyonları olan iki polinomun birbirine oranı olarak verilir.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \ldots (s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2) \ldots (s + p_n)}$$

F(s) fonksiyonunu sıfır yapan payın kökleri ($-z_1$, $-z_2$, ...,$-z_n$) fonksiyonunun sıfırları adını alır.

F(s) fonksiyonunu sonsuz yapan paydanını kökleri ($-p_1$, $-p_2$, ...,$-p_n$) fonksiyonunun kutupları adını alır.

1. Kısmi Kesirlere Ayırma Yöntemiyle Ters Laplace Dönüşümü…

Fonksiyon, paydanın köklerine göre çarpanlarına ayrılırsa:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

Burada paydanın kökleri 3 farklı şekilde olabilir. Bunlar:

1. Reel ve tek katlı köklere sahip olabilir.
2. Reel ve katlı (tekrarlı) köklere sahip olabilir.
3. Karmaşık (kompleks) eşlenik köklere sahip olabilir.

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

1. Kısmi Kesirlere Ayırma Yöntemiyle Ters Laplace Dönüşümü…

1. Farklı reel köklere sahip ise:

Eğer F(s) fonksiyonunun paydasındaki tüm kökler birbirinden farklı (ayrık basit kök) ise F(s) fonksiyonu n adet terimin toplamı olarak yazılabilir:

$$F(s) = \frac{A_1}{(s+p_1)} + \frac{A_2}{(s+p_2)} + \frac{A_3}{(s+p_3)} + \cdots + \frac{A_n}{(s+p_n)}$$

Daha sonra her bir terimin payındaki sabitler aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$A_1 = \lim_{s\to p_1}[(s+p_1).F(s)] = [(s+p_1).F(s)]_{s=-p_1}$$
$$A_2 = \lim_{s\to p_2}[(s+p_2).F(s)] = [(s+p_2).F(s)]_{s=-p_2}$$
$$A_3 = \lim_{s\to p_3}[(s+p_3).F(s)] = [(s+p_3).F(s)]_{s=-p_3}$$
$$\vdots$$
$$A_n = \lim_{s\to n}(s+p_n).F(s) = [(s+p_n).F(s)]_{s=-p_n}$$

1. Kısmi Kesirlere Ayırma Yöntemiyle Ters Laplace Dönüşümü…

1. Farklı reel köklere sahip ise:

Son olarak Laplace tablosu kullanılarak her bir terimin ayrı ayrı Laplace dönüşümleri alınarak tüm fonksiyonunun Laplace dönüşümü gerçekleştirilir.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = A_1.e^{-p_1 t} + A_2.e^{-p_2 t} + A_3.e^{-p_3 t} + \cdots + A_n.e^{-p_n t}$$

Hatırlatma:

Laplace dönüşüm tablosundan

$$\frac{1}{s+a} \quad \Big| \quad e^{-at}$$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

1. Kısmi Kesirlere Ayırma Yöntemiyle Ters Laplace Dönüşümü…

2. Reel ve katlı (tekrarlı) köklere sahipse:

Eğer F(s) fonksiyonunun paydasında *s=-a* ’da m kez tekrarlanan bir katlı kök varsa, F(s) fonksiyonu aşağıdaki gibi kısmi kesirlere ayrılabilir.

$$F(s) = \frac{C_m}{(s+a)^m} + \frac{C_{m-1}}{(s+a)^{m-1}} + \frac{C_{m-2}}{(s+a)^{m-2}} + \cdots + \frac{C_2}{(s+a)^2} + \frac{C_1}{(s+a)^1}$$

Daha sonra her bir terimin payındaki sabitler aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$C_m = \lim_{s\to a}[(s+a)^m.F(s)]$$

$$C_{m-1} = \lim_{s\to a}\frac{d}{ds}[(s+a)^m.F(s)]$$

$$C_{m-i} = \lim_{s\to a}\frac{1}{i!}\frac{d^i}{ds^i}[(s+a)^m.F(s)]$$

$$\vdots$$

$$C_1 = \lim_{s\to a}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}[(s+a)^m.F(s)]$$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

1. Kısmi Kesirlere Ayırma Yöntemiyle Ters Laplace Dönüşümü…

2. Reel ve katlı (tekrarlı) köklere sahipse:

Son olarak F(s) fonksiyonunun terim terim ters Laplace dönüşümü gerçekleştirilerek f(t) fonksiyonu elde edilir.

$$f(t) = \left[\frac{C_m}{(m-1)!}\,t^{m-1} + \frac{C_{m-1}}{(m-2)!}\,t^{m-2} + + \frac{C_{m-2}}{(m-3)!}\,t^{m-3} + \cdots + C_2\,t + C_1\right] \cdot e^{-at}$$

1. Kısmi Kesirlere Ayırma Yöntemiyle Ters Laplace Dönüşümü…

3. Karmaşık (kompleks) eşlenik köklere sahipse:

Karmaşık kökler her zaman çiftler halinde bulunur. Dolayısıyla biri diğerinin eşleniği durumundadır. Örneğin köklerden birisi *a+jb* ise diğer *a-jb* olacaktır.

Eğer F(s) fonksiyonunun paydasında $s_{1,2} = -a \mp jb$ gibi karmaşık eşlenik kök varsa, bu durumda F(s) fonksiyonu aşağıdaki gibi kısmi kesirlere ayrılabilir.

$$F(s) = \frac{K_c}{s+(a-jb)} + \frac{K_{-c}}{s+(a+jb)} + \frac{A_1}{s+p_1} + \frac{A_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s+p_n}$$

Terim terim ters Laplace dönüşümü alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$y(t) = K_c.e^{(-a+jb)t} + K_{-c}.e^{(-a-jb)t} + A_1.e^{-p_1 t} + A_2.e^{-p_2 t} + \cdots + A_n.e^{-p_n t}$$

1. Kısmi Kesirlere Ayırma Yöntemiyle Ters Laplace Dönüşümü…

3. Karmaşık (kompleks) eşlenik köklere sahipse:

Ancak bu ifadedeki K_c ve K_{-c} ifadelerinin de aşağıdaki gibi hesaplanması gerekir. Buna göre:

$$K_c = \frac{1}{2jb}\,|K(-a+jb)|\,e^{j\theta}$$

$$K_{-c} = -\frac{1}{2jb}\,|K(-a-jb)|\,e^{-j\theta}$$

Bu ifadeler y(t) fonksiyonunda yerine konulursa;

$$f(t) = \frac{1}{b}\,|K(a+jb)|\,e^{-at}\,\frac{e^{j(bt+\theta)} - e^{-j(bt+\theta)}}{2j} + A_1.e^{-p_1 t} + A_2.e^{-p_2 t} + \cdots + A_n.e^{-p_n t}$$

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

1. Kısmi Kesirlere Ayırma Yöntemiyle Ters Laplace Dönüşümü…

3. Karmaşık (kompleks) eşlenik köklere sahipse:

Bunu sadeleştirecek olursak;

$$f(t) = \frac{1}{b}\,|K(a+jb)|\,e^{-at}\sin(bt+\theta) + A_1.e^{-p_1 t} + A_2.e^{-p_2 t} + \cdots + A_n.e^{-p_n t}$$

İfadede geçen $K(a+jb)$ ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$K(a+jb) = \lim_{s\to -a+jb}[(s^2 - 2as + a^2 + b^2).F(s)]$$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

ÖRNEKLER

ÖRNEK-1: Aşağıda verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız ($f(t)$ =?).

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s+3)}$$

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s+3)}$$

Fonksiyonun kutupları yani paydadaki polinomun kökleri s_1=0, s_2=-3 olduğuna göre F(s)'nin kısmi kesirlere ayrılmış hali:

$$F(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s+3)}$$

Paydaki terimler aşağıdaki gibi bulunur.

$$A_1 = \lim_{s\to 0}[s.F(s)] = [s.F(s)]_{s=0} = \left[s\,\frac{s+1}{s(s+3)}\right]_{s=0} = \frac{1}{3}$$

$$A_2 = \lim_{s\to -3}[(s+3).F(s)] = [(s+3).F(s)]_{s=-3} = \left[(s+3)\,\frac{s+1}{s(s+3)}\right]_{s=-3} = \frac{2}{3}$$

Buna göre F(s)'nin kısmi kesirlere ayrılmış halinin nihai şekli:

$$F(s) = \frac{1/3}{s} + \frac{2/3}{(s+3)}$$

$$F(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(s+3)}$$

Tablo kullanılarak terim terim Laplace dönüşümü yapılacak olursa fonksiyonun t domenindeki karşılığı aşağıdaki gibi bulunacaktır.

$$f(t) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot e^{-3t}$$

$$f(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot e^{-3t}$$

ÖRNEK-2: Aşağıda verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız ($f(t)$ =?).

$$F(s) = \frac{s^2 + 9s + 19}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

$$F(s) = \frac{s^2 + 9s + 19}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

Fonksiyonun kutupları yani paydadaki polinomun kökleri s_1=-1, s_2=-2, s_3=-4 olduğuna göre F(s)'nin kısmi kesirlere ayrılmış hali:

$$F(s) = \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+2)} + \frac{A_3}{(s+4)}$$

Paydaki terimler aşağıdaki gibi bulunur.

$$A_1 = \lim_{s \to -1} [(s+1).F(s)] = [(s+1).F(s)]_{s=-1} = \left[(s+1)\frac{s^2 + 9s + 19}{(s+1)(s+2)(s+4)}\right]_{s=-1} = \frac{11}{3}$$

$$A_2 = \lim_{s \to -2} [(s+2).F(s)] = [(s+2).F(s)]_{s=-2} = \left[(s+2)\frac{s^2 + 9s + 19}{(s+1)(s+2)(s+4)}\right]_{s=-2} = -\frac{5}{2}$$

$$A_3 = \lim_{s \to -4} [(s+4).F(s)] = [(s+4).F(s)]_{s=-4} = \left[(s+4)\frac{s^2 + 9s + 19}{(s+1)(s+2)(s+4)}\right]_{s=-4} = -\frac{1}{6}$$

Buna göre F(s)'nin kısmi kesirlere ayrılmış halinin nihai hali:

$$F(s) = \frac{11/3}{(s+1)} + \frac{-5/2}{(s+2)} + \frac{-1/6}{(s+4)}$$

$$F(s) = \frac{11}{3(s+1)} - \frac{5}{2(s+2)} - \frac{1}{6(s+4)}$$

Tablo kullanılarak terim terim Laplace dönüşümü yapılacak olursa fonksiyonun t domenindeki karşılığı aşağıdaki gibi bulunacaktır.

$$f(t) = \frac{11}{3}e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$$

ÖRNEK-3: Aşağıda verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız ($f(t)\ =?$).

$$F(s)=\frac{11s+28}{(s+2)^2\ (s+5)}$$

$$F(s)=\frac{11s+28}{(s+2)^2\ (s+5)}$$

Fonksiyonun kutupları yani paydadaki polinomun kökleri $s_{1,2}$=-2 de iki tane tekrarlı ve katlı kök, s_3=-5 ‘de ise bir adet basit kök vardır. Buna göre F(s)’nin kısmi kesirlere ayrılmış hali:

$$F(s)=\frac{C_2}{(s+2)^2}+\frac{C_1}{(s+2)}+\frac{A_1}{(s+5)}$$

Paydaki terimler aşağıdaki gibi bulunur.

$$C_2=\lim_{s\to-2}\left[(s+2)^2.\frac{11s+28}{(s+2)^2\ (s+5)}\right]=2$$

$$C_1=\lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\left[(s+2)^2.\frac{11s+28}{(s+2)^2\ (s+5)}\right]=\lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\left[\frac{11s+28}{(s+5)}\right]=\lim_{s\to-2}\frac{11(s+5)-(11s+28)}{(s+5)^2}=3$$

$$A_1=\lim_{s\to-5}\left[(s+5)\ \frac{11s+28}{(s+2)^2\ (s+5)}\right]=-3$$

Buna göre F(s)'nin kısmi kesirlere ayrılmış hali:

$$F(s) = \frac{C_2}{(s+2)^2} + \frac{C_1}{(s+2)} + \frac{A_1}{(s+5)}$$

$$F(s) = \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{3}{(s+2)} - \frac{3}{(s+5)}$$

Tablo kullanılarak terim terim Laplace dönüşümü yapılacak olursa fonksiyonun t domenindeki karşılığı aşağıdaki gibi bulunacaktır.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = (2t+3)\,e^{-2t} - 3e^{-5t}$$

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

ÖRNEK-4: Aşağıda verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız ($f(t)$ =?).

$$F(s) = \frac{1}{s\,(s+2)\,(s+1)^3}$$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

$$F(s) = \frac{1}{s\,(s+2)\,(s+1)^3}$$

Buna göre F(s)'nin kısmi kesirlere ayrılmış hali:

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+2)} + \frac{A_3}{(s+1)^3} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_1}{(s+1)}$$

Paya ait tüm terimler bulunacak olursa;

$$K_1 = \lim_{s\to 0}[s.F(s)] = [s.F(s)]_{s=0} = \left[s \cdot \frac{1}{s\,(s+2)\,(s+1)^3}\right]_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_2 = \lim_{s\to -2}[(s+2).F(s)] = [(s+2).F(s)]_{s=-2}$$
$$= \left[(s+2) \cdot \frac{1}{s\,(s+2)\,(s+1)^3}\right]_{s=-2} = \frac{1}{2}$$

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+2)} + \frac{A_3}{(s+1)^3} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_1}{(s+1)}$$

$$A_3 = \lim_{s\to -1}\left[(s+1)^3 \frac{1}{s\,(s+2)\,(s+1)^3}\right] = -1$$

$$A_2 = \lim_{s\to -1} \frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 \frac{1}{s\,(s+2)\,(s+1)^3}\right]$$

$$= \lim_{s\to -1} \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s\,(s+2)}\right]$$

$$= \lim_{s\to -1} \frac{-(2s+2)}{[s\,(s+2)]^2}$$

$$= 0$$

$$A_1 = \lim_{s\to -1} \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 \frac{1}{s\,(s+2)\,(s+1)^3}\right] = \lim_{s\to -1} \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{s\,(s+2)}\right] = -1$$

Buna göre F(s)'nin kısmi kesirlere ayrılmış hali:

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+2)} + \frac{A_3}{(s+1)^3} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_1}{(s+1)}$$

$$F(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{(s+1)}$$

Tablo kullanılarak terim terim Laplace dönüşümü yapılacak olursa fonksiyonun t domenindeki karşılığı aşağıdaki gibi bulunacaktır.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot e^{-2t} - \frac{1}{2}\, t^2 \cdot e^{-t} - e^{-t}$$

8. $\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

ÖRNEK-5: Aşağıda verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız ($f(t)$ =?).

$$F(s) = \frac{2s^2 - 2s - 4}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

$$F(s) = \frac{2s^2 - 2s - 4}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

Fonksiyonun kutupları yani paydadaki polinomun kökleri:

$$(s+3)(s^2+2s+2) = 0$$

$$s_1 = -3\text{ 'de bir adet basit kök var.}$$

$$s_{2,3} = -1 \pm j\text{ 'de karmaşık kök çifti var.}$$

Buna göre F(s)'nin kısmi kesirlere ayrılmış hali:

$$F(s) = \frac{K_c}{s+1-j} + \frac{K_{-c}}{s+1+j} + \frac{A_1}{s+3}$$

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

Ters Laplace dönüşümü alınırsa;

$$f(t) = \frac{1}{b}\,|K(a+jb)|\,e^{at}sin(bt+\theta) + A_1.e^{-3t}$$

Burada ilk önce A_1 değerini bulalım. Buna göre;

$$A_1 = \lim_{s\to-3}\left[(s+3)\,\frac{2s^2-2s-4}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right] = 4$$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

Şimdi de karmaşık eşlenik kök çiftinin ters Laplace dönüşümüne geçelim. Buna göre;

$s_{2,3} = -1 \pm j$ 'den $a = -1\,,\;\; b = 1$

İfadede geçen $K(a+jb)$ ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$K(a+jb) = \lim_{s \to -a+jb} [(s^2 - 2as + a^2 + b^2).F(s)]$$

$$K(-1+j) = \lim_{s \to -1+j} \left[(s^2+2s+2)\frac{2s^2-2s-4}{(s+3)(s^2+2s+2)} \right] = \frac{-2-6j}{2+j} = -2-2j$$

Buradan modülü ve argümenti;

$$|K(-1+j)| = |-2-2j| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = 2{,}828$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{-2}{-2}\right) = 225° = 225\frac{\pi}{180} = 3{,}927\ rad$$

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

Yukarıdaki değerler fonksiyonda yerlerine koyulursa kesin çözüm aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f(t) = \frac{1}{b}\,|K(a+jb)|\, e^{at} sin(bt+\theta) + A_1.e^{-3t}$$

$$f(t) = 2{,}83.e^{-t} sin(t+3{,}927) + 4\, e^{-3t}$$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

ÖRNEK-6: Aşağıda verilen diferansiyel denklemi y(0) = 0 ve y' (0) = 1 başlangıç koşullarına göre, Laplace dönüşüm yoluyla çözünüz.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1 + t$$

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1 + t$$

Öncelikle t domenindeki bu ifadenin s domenine dönüştürülmesi gerekir. Buna göre;

$$[s^2Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0)] + 3[s\,Y(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$[s^2Y(s) - s\,\cdot 0 - 1] + 3[s\,Y(s) - 0] + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$s^2Y(s) - 1 + 3s\,Y(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2(s^2 + 3s + 2)}$$

Bu noktadan sonra Y(s) fonksiyonu kısmi kesirlerine ayrılır. Buna göre;

$$Y(s) = \frac{s^2+s+1}{s^2(s^2+3s+2)} = \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_1}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

$$A_2 = \lim_{s\to 0}\left[s^2 \frac{s^2+s+1}{s^2(s^2+3s+2)}\right] = \frac{1}{2}$$

$$A_1 = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{ds}\left[s^2 \frac{s^2+s+1}{s^2(s^2+3s+2)}\right]$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{(2s+1)(s^2+3s+2)-(s^2+s+1)(2s+3)}{(s^2+3s+2)^2}$$

$$= -\frac{1}{4}$$

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

$$B = \lim_{s\to -1}\left[(s+1)\frac{s^2+s+1}{s^2(s+1)(s+2)}\right] = 1$$

$$C = \lim_{s\to -2}\left[(s+2)\frac{s^2+s+1}{s^2(s+1)(s+2)}\right] = -\frac{3}{4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s+2}$$

Ters Laplace dönüşümü alınırsa;

$$y(t) = \frac{1}{2}\cdot t - \frac{1}{4} + e^{-t} - \frac{3}{4}\cdot e^{-2t}$$

ÖRNEK-7: Aşağıda verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız $(f(t) = ?)$.

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+5)(s^2+4s+5)}$$

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+5)(s^2+4s+5)}$$

F(s)'nin kısmi kesirlere ayrılmış halini bulacak olursak;

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+5)(s^2+4s+5)} = \frac{s+3}{(s+5)(s+2-j)(s+2+j)} = \frac{A_1}{(s+5)} + \frac{A_2}{(s+2-j)} + \frac{A_3}{(s+2+j)}$$

$$A_1 = (s+5)F(s)|_{s=-5} = (s+5)\frac{s+3}{(s+5)(s+2-j)(s+2+j)}\bigg|_{s=-5} = -0{,}2$$

$$A_2 = (s+2-j)F(s)|_{s=-2+j} = (s+2-j)\frac{s+3}{(s+5)(s+2-j)(s+2+j)}\bigg|_{s=-2+j} = 0{,}1 - 0{,}2j$$

$$A_3 = (s+2+j)F(s)|_{s=-2-j} = (s+2+j)\frac{s+3}{(s+5)(s+2-j)(s+2+j)}\bigg|_{s=-2-j} = 0{,}1 + 0{,}2j = {A_2}^*$$

$$F(s) = \frac{-0{,}2}{(s+5)} + \frac{0{,}1-0{,}2j}{(s+2-j)} + \frac{0{,}1+0{,}2j}{(s+2+j)}$$

$$F(s) = \frac{-0,2}{(s+5)} + \frac{0,1-0,2j}{(s+2-j)} + \frac{0,1+0,2j}{(s+2+j)}$$

Ters Laplace dönüşümü yapılırsa;

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = -0,2 \cdot e^{-5t} + (0,1-0,2j)e^{(-2+j)t} + (0,1+0,2j)e^{(-2-j)t}$$

$$f(t) = -0,2 \cdot e^{-5t} + e^{-2t}\left[0,1\left(e^{jt}+e^{-jt}\right) - 0,2j\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)\right]$$

$$f(t) = -0,2 \cdot e^{-5t} + e^{-2t}\left[0,2\frac{\left(e^{jt}+e^{-jt}\right)}{2} + 0,4\frac{\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)}{2j}\right]$$

$$f(t) = -0,2 \cdot e^{-5t} + 0,2 \cdot \cos(t) \cdot e^{-2t} + 0,4 \cdot \sin(t) \cdot e^{-2t}$$

Ters LAPLACE Dönüşümü İçin MATLAB Kullanımı

Symbolic Math Toolbox içinde tanımlı olan ilaplace komutuyla ers önüşümü doğrudan sembolik olarak çözümlenebilir.

ilaplace(f) komutu Matlab ortamında tanımlanmış bir f fonksiyonunun sembolik ters Laplace dönüşümünü yapar.

Burada Laplace dönüşümünde kullanılan **s** ve **t** değişkenleri ile varsa **a**, **b** gibi parametrelerin sym veya syms komutları ile önceden tanımlanması gerekir.

ÖRNEK-8

Aşağıda verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü MATLAB kullanarak elde ediniz.

$$F(s) = \frac{s+4}{s^2+5s+6}$$

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

ÖRNEK-8

$$F(s) = \frac{s+4}{s^2+5s+6}$$

MATLAB'da komut penceresine aşağıdakiler yazılarak Laplace dönüşümü yapılır.

```
%Önce fonksiyon için gereken değişken ve parametreler
tanımlanır
syms s t

%Daha sonra fonksiyon, MATLAB komutlarına uygun şekilde
yazılır
f=(s+4)/(s^2+5*s+6)

%Son olarak ters Laplace dönüşümünü yapacak komut
yazılıp Enter %tuşuna basılır

cevap=ilaplace(f)
```

ÖRNEK-8

$$F(s) = \frac{s+4}{s^2+5s+6}$$

Cevap olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

```
2*exp(-2*t) - exp(-3*t)
```

Eğer sonucun daha sade görünmesi istenirse aşağıdaki komut yazılıp Enter tuşuna basılır.

```
pretty(cevap)
```

Bu durumda elde edilecek görüntü;

```
exp(-2 t) 2 - exp(-3 t)
```


ÖRNEK-9

Aşağıda verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü MATLAB kullanarak elde ediniz.

$$F(s) = \frac{s+5}{s^2+6s+10}$$

ÖRNEK-9

$$F(s) = \frac{s+5}{s^2+6s+10}$$

```
>> syms s t
>> F=(s+5)/(s^2+6*s+10)

F =

(s + 5)/(s^2 + 6*s + 10)

>> cevap=ilaplace(F)

cevap =

exp(-3*t)*(cos(t) + 2*sin(t))

>> pretty(cevap)
exp(-3 t) (cos(t) + 2 sin(t))
```


ÖRNEK-10

Aşağıda verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü MATLAB kullanarak elde ediniz.

$$F(s) = \frac{25}{(s+10)^2(s+8)}$$

ÖRNEK-10

$$F(s) = \frac{25}{(s+10)^2(s+8)}$$

```
>> syms s t
>> F=25/((s+10)^2*(s+8))

F =

25/((s + 8)*(s + 10)^2)

>> cevap=ilaplace(F)

cevap =

(25*exp(-8*t))/4 - (25*exp(-10*t))/4 - (25*t*exp(-10*t))/2

>> pretty(cevap)
exp(-8 t) 25   exp(-10 t) 25   t exp(-10 t) 25
------------ - ------------- - ---------------
      4              4                2
```


ÖRNEK-11

Aşağıda verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü MATLAB kullanarak elde ediniz.

$$F(s) = \frac{s^2+9s+19}{(s+4)(s+2)(s+1)}$$

ÖRNEK-11

$$F(s) = \frac{s^2 + 9s + 19}{(s+4)(s+2)(s+1)}$$

```
>> syms s t
>> F=(s^2+9*s+19)/((s+4)*(s+2)*(s+1))

F =

(s^2 + 9*s + 19)/((s + 1)*(s + 2)*(s + 4))

>> cevap=ilaplace(F)

cevap =

(11*exp(-t))/3 - (5*exp(-2*t))/2 - exp(-4*t)/6

>> pretty(cevap)
11 exp(-t)    exp(-2 t) 5    exp(-4 t)
---------- - ----------- - ---------
     3              2            6
```

Dr. Hakan TERZİOĞLU

ÖRNEK-12

Aşağıda verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü MATLAB kullanarak elde ediniz ($f(t) = ?$).

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+5)(s^2+4s+5)}$$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

ÖRNEK-12

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+5)(s^2+4s+5)}$$

```
>> syms s t
>> F=(s+3)/((s+5)*(s^2+4*s+5))

F =

(s + 3)/((s + 5)*(s^2 + 4*s + 5))

>> cevap=ilaplace(F)

cevap =

(exp(-2*t)*(cos(t) + 2*sin(t)))/5 - exp(-5*t)/5
>> pretty(cevap)
exp(-2 t) (cos(t) + 2 sin(t))   exp(-5 t)
----------------------------- - ---------
              5                     5
```

Dr. Hakan TERZİOĞLU

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

Bu günlük bu kadar…

Teşekkürler

Dr. Hakan TERZİOĞLU