TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

Kontrol Sistemleri Ders Notu

Öğr. Gör. Dr. Hakan TERZİOĞLU

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

Ders içerik bilgisi

- **LAPLACE (LAPLAS) DÖNÜŞÜMLERİ**
  - LAPLACE DÖNÜŞÜM YÖNTEMİNİN AVANTAJLARI
  - TANIM
  - LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN TEMEL ÖZELLİKLERİ
- **BAZI ÖNEMLİ FONKSİYONLARIN LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ**
  - BASAMAK FONKSİYON
  - DARBE FONKSİYON
  - ANİ DARBE (IMPULSE) FONKSİYONU
  - RAMPA FONKSİYONU
  - SİNÜS FONKSİYONU
  - LAPLACE DÖNÜŞÜM TABLOSU
- **LAPLACE Dönüşümü İçin MATLAB Kullanımı**
- **ÖRNEKLER**

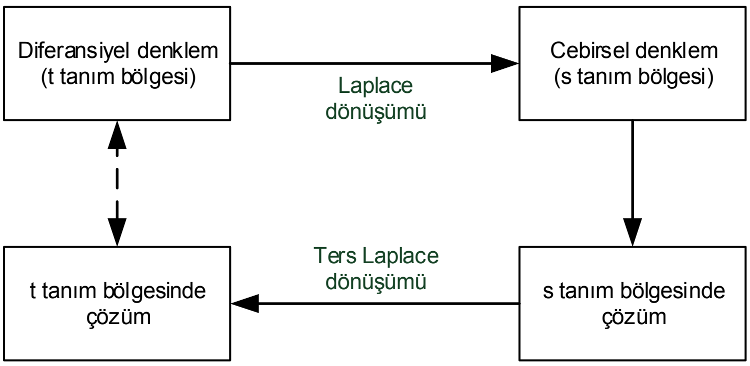
Dr. Hakan TERZİOĞLU

LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

- Laplace (laplas) dönüşümü; basit doğrusal diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bir yöntemdir.
- Tek giriş-tek çıkışlı, sürekli zamanlı lineer kontrol sistemlerinin analiz ve tasarımında kullanılır.
- Bir kontrol sistemi sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerle ifade edilebiliyorsa, bunların çözümünde kullanılacak en kolay yöntem Laplace dönüşüm yöntemidir.
- Laplace dönüşümleriyle türev, integral ve üs alma gibi işlemler çarpma bölme, toplama ve çıkarma gibi basit cebirsel işlemlere dönüştürülmektedir.
- Daha sonra Laplace dönüşüm tablosu ve kısmi kesirlere ayırma yöntemleri kullanılarak diferansiyel denklemin çözümü bulunur.

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009 | TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ | SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ



Basit doğrusal diferansiyel denklemlerin Laplace ile çözümü

LAPLACE DÖNÜŞÜM YÖNTEMİNİN AVANTAJLARI

- Sistemin diferansiyel denklemlerini gerçek anlamda çözmeden sistem başarısının kestirimiyle ilgili grafiksel tekniklerin kullanılmasına imkân sağlar.
- Diferansiyel denklem çözümünde çözümün hem geçici durum bileşenleri hem de kalıcı durum bileşenleri aynı anda elde edilebilir.

TANIM

Zamana bağlı olarak değişen bir f(t) fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = F(s)$$

$\mathcal{L} = Laplas\ dönüşüm\ operatörü$

$s = Laplas\ dönüşüm\ değişkeni$

Burada $s > 0$ olup $s = \sigma + j\omega$ şeklinde kompleks (karmaşık) bir sayıdır.

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN TEMEL ÖZELLİKLERİ

1. Laplace dönüşümü t ve s domenleri arasında yapılan doğrusal bir dönüşümdür.

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s) \\ \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)\end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}\{a_1 f_1(t) \mp a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(s) \mp a_2 F_2(s)$$

2. Ters Laplace dönüşümü t ve s domenleri arasında yapılan doğrusal bir dönüşümdür.

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} = f_1(t) \\ \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = f_2(t)\end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{a_1 F_1(s) \mp a_2 F_2(s)\} = a_1 f_1(t) \mp a_2 f_2(t)$$

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN TEMEL ÖZELLİKLERİ...

3. Türevin Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = s\,F(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right\} = s^2\,F(s) - s\,f(0) - f^1(0)$$

n. dereceden türevin Laplace dönüşümü;

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = s^n\,F(s) - s^{n-1}\,f(0) - s^{n-2}\,f^1(0) - \cdots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$$

$f(0), f^1(0), \dots f^{n-1}(0); sırasıyla\ f(t) fonksiyonu\ ve\ türevlerinin\ başlangıç\ değerleridir.$

$Başlangıç\ koşulları\ sıfır\ olduğunda;$

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n\,F(s)$$

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN TEMEL ÖZELLİKLERİ...

4. İntegralin Laplace dönüşümü;

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\lambda)\,d\lambda\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{\iint_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s^2}$$

5. Başlangıç değer teoremi; Laplace dönüşümü F(s) olan bir f(t) fonksiyonunun t>0 için başlangıç değeri;

$$f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$$

6. Son değer teoremi; Laplace dönüşümü F(s) olan bir f(t) fonksiyonunun son değeri,

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s)$$

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN TEMEL ÖZELLİKLERİ…

7. Zaman skalasının değiştirilmesi (zaman ölçeklemesi); f(t/a) fonksiyonunun yani zaman ölçeği fonksiyonunun Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = a\,F(as)$$

Burada $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ 'dir.

8. Frekans ölçeklemesi; F(s/a) fonksiyonunun yani frekans ölçeği fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(\frac{s}{a}\right)\right\} = a\,f(at)$$

Burada $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ 'dir.

9. Sistem dinamiğinde ölü zaman veya zaman gecikmesi olarak da ifade edilen T kadar ötelenmiş fonksiyonunun yani f(t-T)'nin ***t ≥ T*** için Laplace dönüşümü;

$$\mathcal{L}\{f(t-T)\} = e^{-sT}\,F(s)$$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN TEMEL ÖZELLİKLERİ…

10. Çarpımın Laplace dönüşümü;

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\omega)\;\; F_2(s-\omega)\,d\omega$$

Burada;

$$F_1(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}$$
$$F_2(s) = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN TEMEL ÖZELLİKLERİ…

11. Çarpımın ters Laplace dönüşümü;

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\cdot F_2(s)\} = \int_0^t f_1(\lambda)\;\; F_2(\lambda - T)\, d\lambda = \int_0^t f_1(\lambda - T)\;\; F_2(\lambda)\, d\lambda$$

Burada;

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} = f_1(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = f_2(t)$$

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN TEMEL ÖZELLİKLERİ…

12. Karmaşık öteleme; $e^{-at}\, f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü;

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\, f(t)\} = F(s+a)$$

Burada;

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

BAZI ÖNEMLİ FONKSİYONLARIN LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

Otomatik kontrol sistemlerini test etmek amacıyla bazı giriş fonksiyonları kullanılır. Bunlar;

- Basamak fonksiyonu,
- Darbe (puls) fonksiyonu,
- Ani darbe (impulse) fonksiyonu,
- Rampa (ramp) fonksiyonu,
- Sinüzoidal fonksiyon,
- Cosinüs fonksiyonu vb.

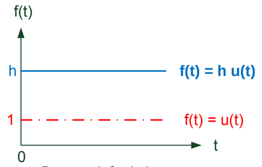
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

Basamak Fonksiyon

$f(t) = h\,u(t)$ şeklinde zamanın fonksiyonu olarak verilen ve

$$t < 0 \text{ için } f(t) = 0$$

$$t \geq 0 \text{ için } f(t) = h = sabit$$



Basamak fonksiyonu

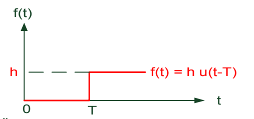
olarak tanımlanan fonksiyon, basamak fonksiyon adını alır. h=1 olursa birim basamak fonksiyonu adını alır.

Basamak fonksiyonu; fiziksel anlamda bir eleman veya sisteme ani olarak sabit değere yükselen bir sinyal uygulanmasını ifade eder. Basamak fonksiyonun Laplace dönüşümü;

$$\mathcal{L}\{h\ u(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} h\, e^{-st}\, dt = -\frac{h}{s}\, e^{-st}\Big|_0^{\infty} = \frac{h}{s}$$

T kadar ötelenmiş birim basamak fonksiyonun Laplace dönüşümünü 9. özellikten faydalanarak yazacak olursak;

$$\mathcal{L}\{u(t-T)\} = \frac{e^{-sT}}{s}$$



Ötelenmiş birim basamak fonksiyonu

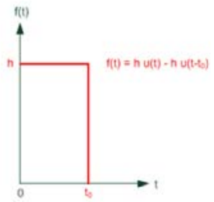
Darbe Fonksiyon

Bir darbe fonksiyonu analitik olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$0 < t \leq t_0 \; için \; f(t) = h = sabit$$

$$t < 0, \quad t > t_0 \; için \; f(t) = 0$$

h=1 olursa birim darbe fonksiyonu adını alır.



Darbe fonksiyonu

Fiziksel olarak çok kısa bir süre için ($t=t_0$) ortaya çıkan ve sonra kaybolan bir sinyali (işareti) ifade eder.

Bir darbe fonksiyonu t=0 anında ortaya çıkan ve şiddeti (yüksekliği) h olan bir basamak fonksiyon ile $t=t_0$ anında başlayan ve şiddeti –h olan bir basamak fonksiyonun doğrusal toplamı (üst üste katlanması) olarak ele alınabilir. Yani;

$$f(t) = h\,u(t) - h\,u(t - t_0)$$

Buna göre daha önceki özelliklerden faydalanarak darbe fonksiyonunun Laplace dönüşümünü aşağıdaki gibi yazmak mümkündür.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{h\,u(t)\} - \mathcal{L}\{h\,u(t - t_0)\} = \frac{h}{s}\,(1 - e^{-t_0 s})$$

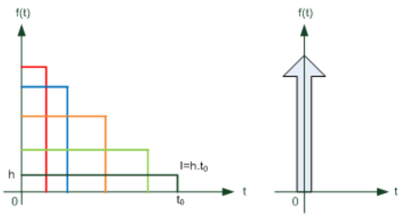
Dr. Hakan TERZİOĞLU

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

Ani Darbe (Impulse) Fonksiyonu

Dirac Delta fonksiyonu da denilen bu fonksiyon, darbe fonksiyonunun bir limiti olarak ele alınabilir. Yandaki şekilde görüldüğü gibi; darbe fonksiyonu $h.t_0$ alanı sabit kalmak koşuluyla darbenin devam süresi (t_0) küçültülürse h şiddeti sonsuza kadar artacaktır.

$I=h.t_0$ alanı sabit tutularak $t \to 0$ yapılırsa ani darbe fonksiyonu elde edilmiş olur.



Ani darbe fonksiyonu

I=1 durumu birim ani darbe fonksiyonu adını alır ve $\delta(t)$ ile gösterilir.

Buna göre ani darbe fonksiyonu $f(t) = I.\delta(t)$ 'nin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi olur.

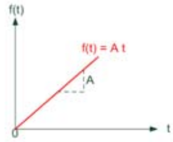
$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{I.\delta(t)\} = I$$

Eğer birim ani darbe fonksiyonu (I=1) söz konusuysa bu durumda aşağıdaki gibi olur.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{I.\delta(t)\} = 1$$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

Rampa Fonksiyonu



Rampa fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A.t, & t \geq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyona rampa fonksiyonu denir.

Fiziksel olarak zaman bağlı biçimde yavaş yavaş sürekli artan bir giriş işaretini ifade eder. Laplace dönüşümünü bulmak için kısmi integrasyon kuralı uygulanırsa;

$$F(s) = \mathcal{L}\{A.t)\} = \int_0^\infty A.t.\, e^{-st}\, dt$$

$$\left.\begin{matrix} u = A.t \\ dv = e^{-st} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \int_a^b u.dv = uv|_b^a - \int_a^b v.du$$ yazılırsa;

$$F(s) = \mathcal{L}\{A.t)\} = \int_0^\infty A.t.\, e^{-st}\, dt = \left.\frac{-A.t.\, e^{-st}}{s}\right|_0^\infty - A\int_0^\infty \left(\frac{e^{-st}}{s}\right) dt = \left.\frac{-A.t.\, e^{-st}}{s}\right|_0^\infty - \left.\frac{A.\, e^{-st}}{s^2}\right|_0^\infty$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{A.t)\} = \frac{A}{s^2}$$

Bunu genel kural olarak yazacak olursak;

$$\mathcal{L}\{t^n)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

Sinüs Fonksiyonu

Sinüs fonksiyonu *f(t) = sin(wt)* olup w (rad/sn) cinsinden frekanstır. Sinüs fonksiyonunun Laplace dönüşümü;

$$F(s) = \mathcal{L}\{\sin wt\} = \int_0^\infty (\sin wt).\, e^{-st}\, dt$$

$\sin wt = \frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j}$ özdeşliği kullanılırsa;

$$\mathcal{L}\{\sin wt\} = \int_0^\infty \frac{1}{2j}\left(e^{-(s-jw)t} - e^{-(s+jw)t}\right) dt$$

$$\mathcal{L}\{\sin wt\} = \frac{1}{2j}\left[\frac{e^{-(s-jw)t}}{s-jw} - \frac{e^{-(s+jw)t}}{s+jw}\right]_{t=\infty}$$

$$\mathcal{L}\{\sin wt\} = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-jw} - \frac{1}{s+jw}\right]$$

$$\mathcal{L}\{\sin wt\} = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

Laplace Dönüşüm Tablosu…

	Fonksiyonun Adı	f(t)	F(s)
1	Birim Ani Darbe	$\delta(t)$	1
2	Birim Basamak	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	Birim Ramp	t	$\frac{1}{s^2}$
4	Üstel	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	Tekrarlı Kök	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	Sinüs	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7	Cosinüs	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
8	Polinom	$t^n (n=1,2,3,...)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
9	Tekrarlı Kök	$t^n e^{-at} (n=1,2,3,...)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	Sönümlü Sinüs	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
11	Sönümlü Cosinüs	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

Laplace Dönüşüm Tablosu…

$F(s)$	$f(t) \quad 0 \leq t$	
1. 1	$\delta(t)$	unit impulse at $t = 0$
2. $\frac{1}{s}$	1 or $u(t)$	unit step starting at $t = 0$
3. $\frac{1}{s^2}$	$t \cdot u(t)$ or t	ramp function
4. $\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$	n = positive integer
5. $\frac{1}{s} e^{-as}$	$u(t-a)$	unit step starting at $t = a$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

Laplace Dönüşüm Tablosu…

6.	$\frac{1}{s}(1-e^{-as})$	$u(t)-u(t-a)$ rectangular pulse
7.	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at} exponential decay
8.	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$ n = positive integer
9.	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$
10.	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab}(1-\frac{b}{b-a}e^{-at}+\frac{a}{b-a}e^{-bt})$

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009 | TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ | SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

Laplace Dönüşüm Tablosu…

11.	$\frac{s+\alpha}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab}[\alpha-\frac{b(\alpha-a)}{b-a}e^{-at}+\frac{a(\alpha-b)}{b-a}e^{-bt}]$
12.	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$
13.	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{a-b}(ae^{-at}-be^{-bt})$
14.	$\frac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}[(\alpha-a)e^{-at}-(\alpha-b)e^{-bt}]$
15.	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

Laplace Dönüşüm Tablosu...

16. $\dfrac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\dfrac{(\alpha-a)e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{(\alpha-b)e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\dfrac{(\alpha-c)e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
17. $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\ \omega t$
18. $\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\ \omega t$
19. $\dfrac{s+\alpha}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}{\omega}\sin(\omega t+\phi)\quad \phi=\text{atan2}(\omega,\alpha)$
20. $\dfrac{s\sin\theta+\omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t+\theta)$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

Laplace Dönüşüm Tablosu...

21. $\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$
22. $\dfrac{s+\alpha}{s(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{\alpha}{\omega^2}-\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}{\omega^2}\cos(\omega t+\phi)\quad \phi=\text{atan2}(\omega,\alpha)$
23. $\dfrac{1}{(s+a)(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{e^{-at}}{a^2+\omega^2}+\dfrac{1}{\omega\sqrt{a^2+\omega^2}}\sin(\omega t-\phi)$ $\phi=\text{atan2}(\omega,\alpha)$
24. $\dfrac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$\dfrac{1}{b}e^{-at}\sin(bt)$
24a. $\dfrac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\dfrac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t)$
25. $\dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos(bt)$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009 | TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ | SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

Laplace Dönüşüm Tablosu…

26. $\dfrac{s+\alpha}{(s+a)^2+b^2}$	$\dfrac{\sqrt{(\alpha-a)^2+b^2}}{b}e^{-at}\sin(bt+\phi)$ $\quad \phi=\text{atan2}(b,\alpha-a)$
26a. $\dfrac{s+\alpha}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\sqrt{\dfrac{\left(\frac{\alpha}{\omega_n}-\zeta\omega_n\right)^2}{1-\zeta^2}+1}\cdot e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi)$ $\phi=\text{atan2}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2},\alpha-\zeta\omega_n)$
27. $\dfrac{1}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{b\sqrt{a^2+b^2}}e^{-at}\sin(bt-\phi)$ $\quad \phi=\text{atan2}(b,-a)$
27a. $\dfrac{1}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$\dfrac{1}{\omega_n^2}-\dfrac{1}{\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi)$ $\phi=\cos^{-1}\zeta$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009 | TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ | SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

Laplace Dönüşüm Tablosu…

28. $\dfrac{s+\alpha}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{\alpha}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{b}\sqrt{\dfrac{(\alpha-a)^2+b^2}{a^2+b^2}}e^{-at}\sin(bt+\phi)$ $\phi=\text{atan2}(b,\alpha-a)-\text{atan2}(b,-a)$
28a. $\dfrac{s+\alpha}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$\dfrac{\alpha}{\omega_n^2}+\dfrac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\sqrt{\left(\dfrac{\alpha}{\omega_n}-\zeta\right)^2+(1-\zeta^2)}\cdot e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi)$ $\phi=\text{atan2}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2},\alpha-\omega_n\zeta)-\text{atan2}(\sqrt{1-\zeta^2},-\zeta)$
29. $\dfrac{1}{(s+c)[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{e^{-ct}}{(c-a)^2+b^2}+\dfrac{e^{-at}\sin(bt-\phi)}{b\sqrt{(c-a)^2+b^2}}$ $\quad \phi=\text{atan2}(b,c-a)$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

Laplace Dönüşüm Tablosu…

$F(s)$	$f(t) \quad 0 \leq 1$
30. $\dfrac{1}{s(s+c)[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{1}{c(a^2+b^2)} - \dfrac{e^{-ct}}{c[(c-a)^2+b^2]} + \dfrac{e^{-at}\sin(bt-\phi)}{b\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(c-a)^2+b^2}}$ $\phi = \mathrm{atan2}(b,-a) + \mathrm{atan2}(b,c-a)$
31. $\dfrac{s+\alpha}{s(s+c)[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{\alpha}{c(a^2+b^2)} + \dfrac{(c-\alpha)e^{-ct}}{c[(c-a)^2+b^2]}$ $+\dfrac{\sqrt{(\alpha-a)^2+b^2}}{b\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(c-a)^2+b^2}} e^{-at}\sin(bt+\phi)$ $\phi = \mathrm{atan2}(b,\alpha-a) - \mathrm{atan2}(b,-a) - \mathrm{atan2}(b,c-a)$
32. $\dfrac{1}{s^2(s+a)}$	$\dfrac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})$
33. $\dfrac{1}{s(s+a)^2}$	$\dfrac{1}{a^2}(1-e^{-at}-ate^{-at})$
34. $\dfrac{s+\alpha}{s(s+a)^2}$	$\dfrac{1}{a^2}[\alpha-\alpha e^{-at}+a(a-\alpha)te^{-at}]$

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

Laplace Dönüşüm Tablosu…

35. $\dfrac{s^2+\alpha_1 s+\alpha_0}{s(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{\alpha_0}{ab} + \dfrac{a^2-\alpha_1 a+\alpha_0}{a(a-b)} e^{-at} - \dfrac{b^2-\alpha_1 b+\alpha_0}{b(a-b)} e^{-bt}$
36. $\dfrac{s^2+\alpha_1 s+\alpha_0}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{\alpha_0}{c^2} + \dfrac{1}{bc}[(a^2-b^2-\alpha_1 a+\alpha_0)^2$ $+b^2(\alpha_1-2a)^2]^{\frac{1}{2}} e^{-at}\sin(bt+\phi)$ $\phi = \mathrm{atan2}[b(\alpha_1-2a), a^2-b^2-\alpha_1 a+\alpha_0] - \mathrm{atan2}(b,-a)$ $c^2 = a^2 + b^2$

Dr. Hakan TERZİOĞLU

Laplace Dönüşüm Tablosu…

$F(s)$	$f(t)$ $\quad 0 \leq 1$
37. $\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{(1/\omega)\sin(\omega t+\phi_1)+(1/b)e^{-at}\sin(bt+\phi_2)}{[4a^2\omega^2+(a^2+b^2-\omega^2)^2]^{\frac{1}{2}}}$ $\phi_1=\operatorname{atan2}(-2a\omega, a^2+b^2-\omega^2)$ $\phi_2=\operatorname{atan2}(2ab, a^2-b^2+\omega^2)$
38. $\dfrac{s+\alpha}{(s^2+\omega^2)[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{\alpha^2+\omega^2}{c}\right)^{\frac{1}{2}}\sin(\omega t+\phi_1)$ $+\dfrac{1}{b}\left[\dfrac{(\alpha-a)^2+b^2}{c}\right]^{\frac{1}{2}}e^{-at}\sin(bt+\phi_2)$ $c=(2a\omega)^2+(a^2+b^2-\omega^2)^2$ $\phi_1=\operatorname{atan2}(\omega,\alpha)-\operatorname{atan2}(2a\omega, a^2+b^2+\omega^2)$ $\phi_2=\operatorname{atan2}(b,\alpha-a)+\operatorname{atan2}(2ab, a^2-b^2-\omega^2)$

Laplace Dönüşüm Tablosu…

39. $\dfrac{s+\alpha}{s^2[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{1}{c}\left(\alpha t+1-\dfrac{2\alpha a}{c}\right)+\dfrac{[b^2+(\alpha-a)^2]^{\frac{1}{2}}}{bc}e^{-at}\sin(bt+\phi)$ $c=a^2+b^2$ $\phi=2\operatorname{atan2}(b,a)+\operatorname{atan2}(b,\alpha-a)$
40. $\dfrac{s^2+\alpha_1 s+\alpha_0}{s^2(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{\alpha_1+\alpha_0 t}{ab}-\dfrac{\alpha_0(a+b)}{(ab)^2}-\dfrac{1}{a-b}\left(1-\dfrac{\alpha_1}{a}+\dfrac{\alpha_0}{a^2}\right)e^{-at}$ $-\dfrac{1}{b-a}\left(1-\dfrac{\alpha_1}{b}+\dfrac{\alpha_0}{b^2}\right)e^{-bt}$

ÖRNEK-1

Aşağıda verilen fonksiyonun Laplace dönüşümünü yapınız.

$$f(t) = e^{-4t} + \sin(t-2) + t^2.e^{-2t}$$

ÖRNEK-1

$$f(t) = e^{-4t} + \sin(t-2) + t^2.e^{-2t}$$

Öncelikle e^{-4t}, $\sin t$, t^2 genel fonksiyonlarının Laplace dönüşümlerini tablodan yazalım. Buna göre:

$$\mathcal{L}\{e^{-4t}\} = \frac{1}{s+4}$$

$$\mathcal{L}\{sint\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$$

Daha sonra ötelenmiş fonksiyon (9. özellik) ve karmaşık öteleme (12. özellik) kullanılarak;

$$\mathcal{L}\{sin(t-2)\} = \frac{e^{-2s}}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}\{t^2.e^{-2t}\} = \frac{2}{(s+2)^3}$$

Doğrusallık özelliğinden (1. özellik) fonksiyonun son şekli aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{e^{-2s}}{s^2+1} + \frac{2}{(s+2)^3}$$

ÖRNEK-2

Aşağıda verilen diferansiyel denklemin Laplace dönüşümünü $y(0) = 0$ ve $\dot{y}(0) = 1$ başlangıç koşullarına göre yapınız.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1 + t$$

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

ÖRNEK-2

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1 + t$$

Öncelikle denklemdeki her ifadenin ayrı ayrı dönüşümünü yapalım. Buna göre;

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{3\frac{dy}{dt}\right\} = 3[sY(s) - y(0)]$$

$$\mathcal{L}\{2y\} = 2Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

ÖRNEK-2

Bunlar birleştirilecek olursa;

$$[s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)] + 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$y(0) = 0$ ve $\dot{y}(0) = 1$ başlangıç koşullarını yerlerine yazıp düzenleyecek olursak;

$$[s^2Y(s) - s \cdot 0 - 1] + 3[sY(s) - 0] + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$s^2Y(s) - 1 + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) - 1 = \frac{s+1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2(s^2 + 3s + 2)}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1 + t\right] = \frac{s^2 + s + 1}{s^2(s^2 + 3s + 2)}$$

LAPLACE Dönüşümü İçin MATLAB Kullanımı

Symbolic Math Toolbox içinde tanımlı olan laplace komutuyla Laplace dönüşümü doğrudan sembolik olarak çözümlenebilir.

laplace(f) komutu Matlab ortamında tanımlanmış bir f fonksiyonunun sembolik Laplace dönüşümünü yapar.

Burada Laplace dönüşümünde kullanılan **s** ve **t** değişkenleri ile varsa **a**, **b** gibi parametrelerin sym veya syms komutları ile önceden tanımlanması gerekir.

ÖRNEK-3

Aşağıda verilen fonksiyonun Laplace dönüşümünü MATLAB kullanarak elde ediniz.

$$f(t) = 3e^{-5t}cost - e^{-5t}sint$$

TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

ÖRNEK-3

$$f(t) = 3e^{-5t}cost - e^{-5t}sint$$

MATLAB'da komut penceresine aşağıdakiler yazılarak Laplace dönüşümü yapılır.

```
%Önce fonksiyon için gereken değişken ve parametreler tanımlanır
syms s t

%Daha sonra fonksiyon, MATLAB komutlarına uygun şekilde yazılır
f=3*exp(-5*t)*cos(t)-exp(-5*t)*sin(t)

%Son olarak laplace dönüşümünü yapacak komut yazılıp Enter tuşuna
basılır

cevap=laplace(f)
```

ÖRNEK-3

$$f(t) = 3e^{-5t}cost - e^{-5t}sint$$

Cevap olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

```
cevap =

(3*(s + 5))/((s + 5)^2 + 1) - 1/((s + 5)^2 + 1)
```

Eğer sonucun daha güzel (kesirli) görünmesi istenirse aşağıdaki komut yazılıp Enter tuşuna basılır.

```
pretty(cevap)
```

Bu durumda elde edilecek görüntü;

```
>> pretty(cevap)
  3 (s + 5)           1
------------ - ------------
        2              2
(s + 5)   + 1  (s + 5)   + 1
```


ÖRNEK-4

$f(t) = 2e^{-t}\cos 10t - t^4 + 6e^{-(t-10)}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

```
>> syms s t

>> f=2*exp(-t)*cos(10*t)-t^4+6*exp(-t+10)

f =

6*exp(10 - t) + 2*cos(10*t)*exp(-t) - t^4

>> cevap=laplace(f)
```

ÖRNEK-4

$$f(t) = 2e^{-t}\cos 10t - t^4 + 6e^{-(t-10)}$$

```
>> cevap=laplace(f)

cevap =

(2*(s + 1))/((s + 1)^2 + 100) - 24/s^5 + (6*exp(10))/(s + 1)

>> pretty(cevap)
   2 (s + 1)       24    6 exp(10)
-------------- - -- + ---------
        2           5     s + 1
(s + 1)   + 100    s
```


TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

ÖRNEK-5

$f(t) = \delta(t) + 2u(t-3) + at^2 + bt\sin\omega t$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

```
>> syms s t a b w
 f=dirac(t)+2*heaviside(t-3)+a*t^2+b*t*sin(w*t)

f =

2*heaviside(t - 3) + dirac(t) + a*t^2 + b*t*sin(t*w)
```

Dr. Hakan TERZİOĞLU

ÖRNEK-5

$$f(t) = \delta(t) + 2u(t-3) + at^2 + bt\sin\omega t$$

```
>> sonuc=laplace(f)

sonuc =

(2*exp(-3*s))/s + (2*a)/s^3 + (2*b*s*w)/(s^2 + w^2)^2 + 1

>> pretty(sonuc)
exp(-3 s) 2    2 a      2 b s w
----------- + --- + ---------- + 1
     s          3      2     2 2
               s     (s   + w )
```


TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ KONYA - 2009
TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ KONYA - 1975

Bu günlük bu kadar…

Teşekkürler

Dr. Hakan TERZİOĞLU