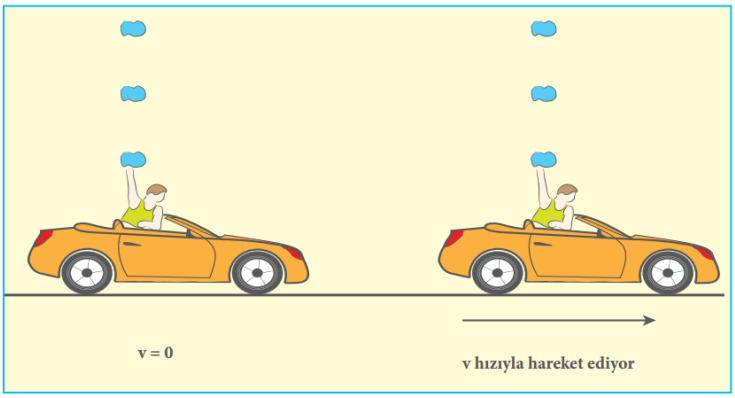
1. HAFTA

Statik, uzayda kuvvetler etkisi altındaki cisimlerin denge koşullarını inceler.



Statikte üç temel büyüklük vardır.

- **Uzay:** Fiziksel olayların meydana geldiği geometrik bir bölgedir. İncelenen problemin türüne göre uzay bir boyutlu, iki boyutlu ve üç boyutlu olabilir.

- **Kuvvet:** Kuvvet, tatbik edildiği cisimlerin bulundukları konumları değiştirmeye çalışan fiziksel bir etki olarak tanımlanabilir. Aynı zamanda hareketin nedeni olarak düşünülen fiziksel etkenin matematik modelidir.

Kuvvet gibi şiddeti, tatbik noktası, doğrultusu ve yönüyle tanımlanan büyüklüklere Vektörel büyüklükler denir.

Skaler ve vektörel büyüklüklere örnekler

Skaler	Vektörel
Uzunluk	Yer değiştirme
Kütle	Hız
Zaman	İvme
Sıcaklık	Kuvvet
Akım şiddeti	Elektriksel alan
Işık şiddeti	Manyetik alan
Sürat	
Yüzey alanı	
Hacim	

- **Cisim:** Fiziksel etkilerin ölçüldüğü geometrik bölgeye verilen addır. Statikte cisimler aşağıda verilen iki ana idealleştirmeyle tanımlanırlar:

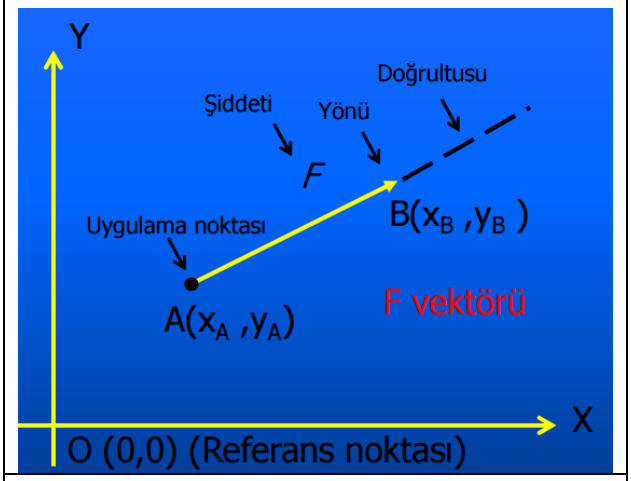
1. **Particle (Maddesel Nokta):** Kütlesi olan fakat boyutları ihmal edilen bir nesnedir. Uzayda tek nokta işgal ettiği kabul edilebilecek az miktarda madde kastedilmektedir.

2. **Rigid Body (Rijid Cisim)** : Bir kuvvetin uygulanmasından önce ve sonra birbirine göre sabit yerler işgal eden çok sayıda maddesel noktanın birleşimidir.

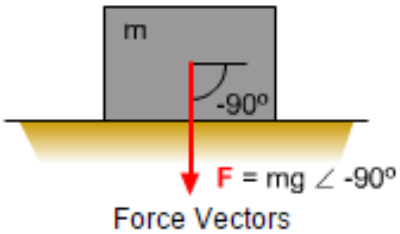
VEKTÖRLER VE KUVVETLER

Hem sayısal hem de yön özelliklerine sahip olan fiziksel nicelikler, vektörlerle temsil edilir

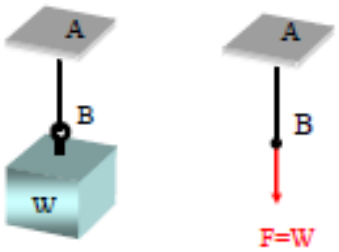
Konum vektörü



Kuvvet vektörü



Eğer bir cisim ip, zincir vb. ile bir yere aşağıdaki Şekil'de görüldüğü gibi **asılmış** ise yer çekimi etkisi ile ipi veya zinciri, **düşey** doğrultuda **ağırlığı** kadar bir kuvvetle **aşağı** doğru çekmektedir. Kuvvet B noktasından etki etmektedir. Yönü aşağı ve doğrultusu AB dir.



Şekil'de görüldüğü gibi kuvvetin tam olarak tanımlanabilmesi için;

*a. **Kuvvetin şiddeti*** *(F=W)*
*b. **Tatbik noktası*** *(B)*
*c. **Doğrultusu*** *(AB)*
*d. **Yönü*** *(Aşağı)*

Kuvvetin Elemanları

bilinmelidir.

Genel itibari ile vektörler;

Bilgisayar grafik programlarında, haritalarda (harita mühendisliğinin temel konusudur), uzaktan algılama sistemlerinde, koordinat saptama gibi mühendislik alanlarında, GPS:Global Position System, GIS:Geographic Information System, bilgisayar destekli tasarım ve bilgisayar destekli imalatta, yaygın olarak askeri alanda, yapısal analizlerde, yön bulma süreçlerinde, fizik ve matematikte, mühendislik alanlarının genelinde kullanılır.

Fiziksel bir kuramın vektörler cinsinden ifadesi o kuramın kavramsal olarak basitleşmesini sağlar ve anlaşılırlığını artırır. Bu sayede fiziksel yapının matematik olarak modellenmesi mümkün olur.

Gemilerin yönünün tespiti ve ne kadar hareket edildiğinin hesaplanmasında kullanılır.

Vektörlerden, önemli bir kullanım şekli olarak hızın tarifinde yararlanılır. Bu sayede hareket eden bir aracın yerdeğişimi geometrik bir düzlem üzerinde basit bir çizgi haline dönüştürülür. Bu kuram navigasyon cihaz grafiklerinin oluşturulmasında, hava ve deniz araçlarının yerdeğişimlerinin tespitinde kullanılır.

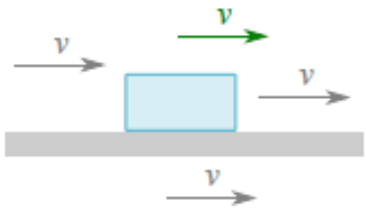
İlaveten vektörler cisimlerin yörüngelerinin hesaplanmasında kullanılır. Örneğin; atılan herhangi bir nesnenin (football topu gibi) takip ettiği yörünge, vektörler sayesinde tahmin edilebilir. Çoklu vektörlerin kullanılması ve bu vektörlerin toplanması/çıkarılması/çarpılması süreci, rüzgâr gibi harici kuvvetlerin çevrelediği yapının modellenerek izleyeceği muhtemel yörüngenin, gideceği mesafenin ve hızın hassas bir şekilde tespitine/tahminine imkân verir.

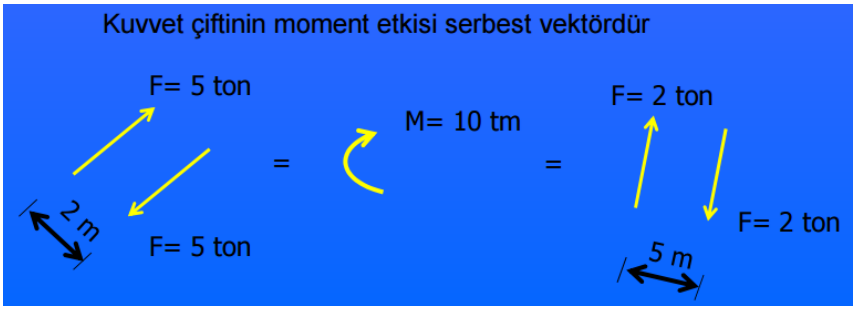
Skaler (Sadece fiziki büyüklüğü olan sıcaklık, kütle, hacim, uzunluk, yoğunluk, enerji, alan gibi değerler) büyüklükler için geçerli olan dört işlem (toplama, çıkarma, çarpma bölme) ve diğer matematiksel (türev, integral) işlemler vektörler içinde vektörlere has yöntemlerle yapılabilmektedir.

Vektörlerin çeşitleri

Serbest vektör

Hiçbir özelliği olmayan vektördür. Hız vektörünün yeri önemli değildir

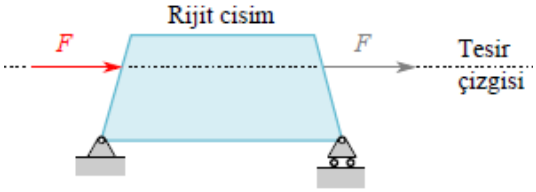


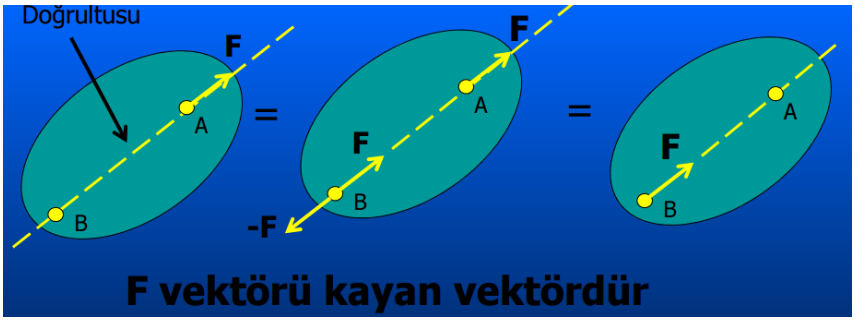


Kayan vektör

Belirli bir tesir çizgisi olan ve o çizgi üzerinde kaydırılabilen fakat çizginin dışına çıkarılınca etkisi değişen vektördür.

Statik dersi için geçerlidir

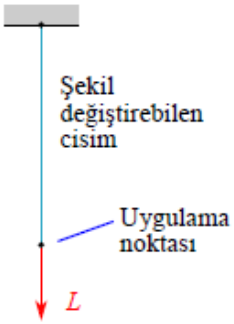


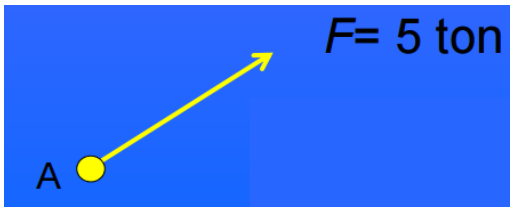


Bağlı (sabit) vektör

Belirli bir uygulama noktası olan ve başka bir noktaya uygulanırsa etkisi değişen vektördür.

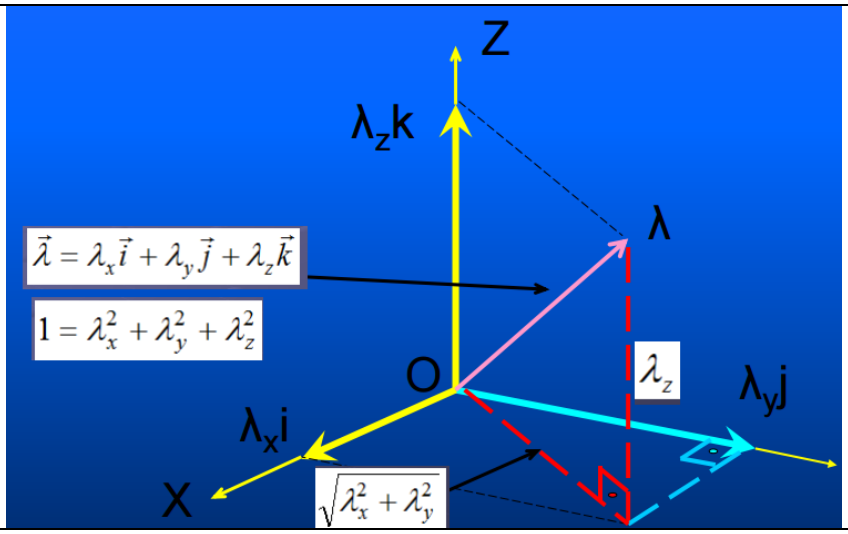
Mukavemet dersi için geçerlidir.





Birim vektör

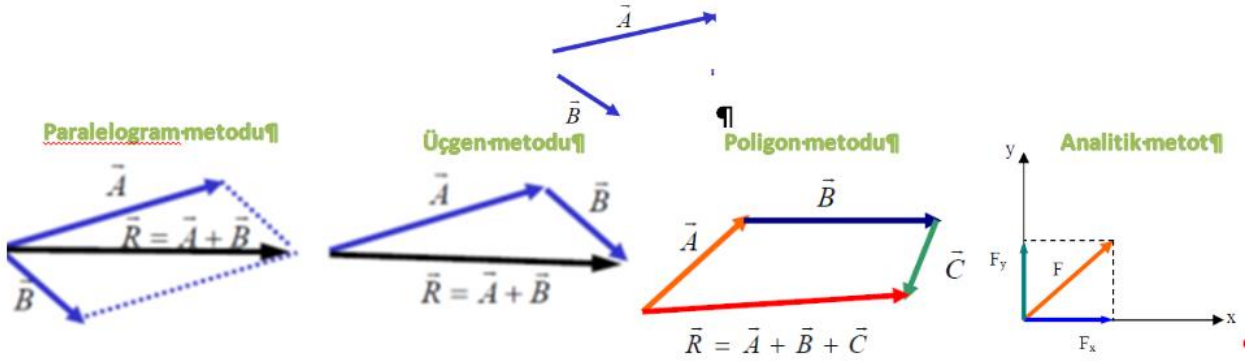
Boyu 1 birim olan vektördür



VEKTÖRLERİN TOPLANMASI VE ÇIKARILMASI

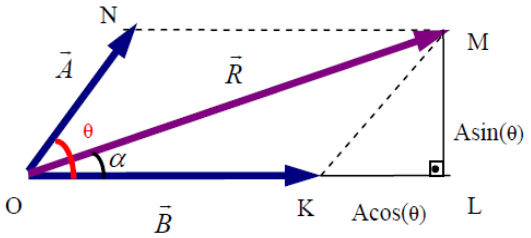
Vektörlerin Toplanması

Vektörlerin toplanması için dört temel metot vardır.



1. Paralel kenar metodu

Bu vektörlerin arasındaki açı θ ise bileşke vektör, α açısıyla iki vektörün arasında gösterilir. Toplamın şiddet ve $\vec{B}$ ile yaptığı açıyı bulan ifadeler aşağıdaki formüllerle hesaplanır.



$$\bar{OM} = |R| = \left[(OK + A\cos(\theta))^2 + (A\sin(\theta)^2\right]^{1/2}$$

$$|R| = \sqrt{A^2 + B^2 \pm 2ABCos(\theta)}$$

θ>90° ise işaret neg. | θ≤90° ise işaret poz.

$$\alpha = \arctan\frac{A\sin(\theta)}{B + A\cos(\theta)}$$

Not:

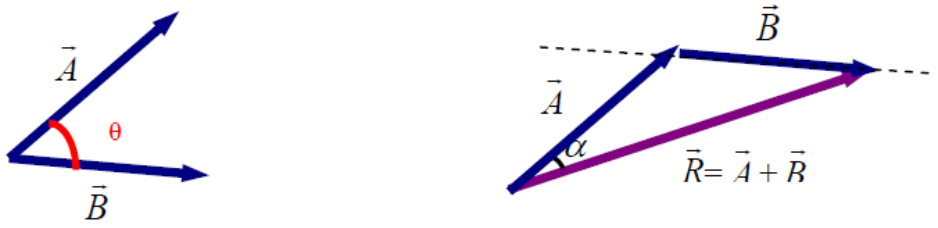
$\vec{R}$ **nin büyüklüğü** $|\vec{R}| = R$ **olur.**
$\theta = 90°$ **ise iki vektör birbirine diktir ve** $|R| = [A^2 + B^2)]^{1/2}$ ve $\alpha = \tan^{-1}\frac{A}{B}$ **Vektörler arasındaki açı 90° ve A vektörü B vektörüne eşitse, R bileşke vektörü A vektörünün √2 katına eşittir.**
Eğer $\theta \leq 90°$ **ise** $\vec{R} > \vec{A}$ **ve** $\vec{R} > \vec{B}$ **olur.**
Eğer $\theta > 90°$ **ise** $\vec{R}$ **nin şiddeti** $\vec{A}$ **ve** $\vec{B}$ **vektörlerinin birinden yada her ikisinden küçük olabilir.**
Vektörler arasındaki açı 120° ve A vektörü B vektörüne eşitse, R bileşke vektörü A vektörüne eşittir
Vektörler arasındaki açı 60° ve A vektörü B vektörüne eşitse, R bileşke vektörü A vektörünün √3 katına eşittir.

$\theta=0°$ **ise iki vektör çakışıktır.**

$\theta=180°$ **ise iki vektör aynı doğrultuda fakat zıt yönlüdür.**

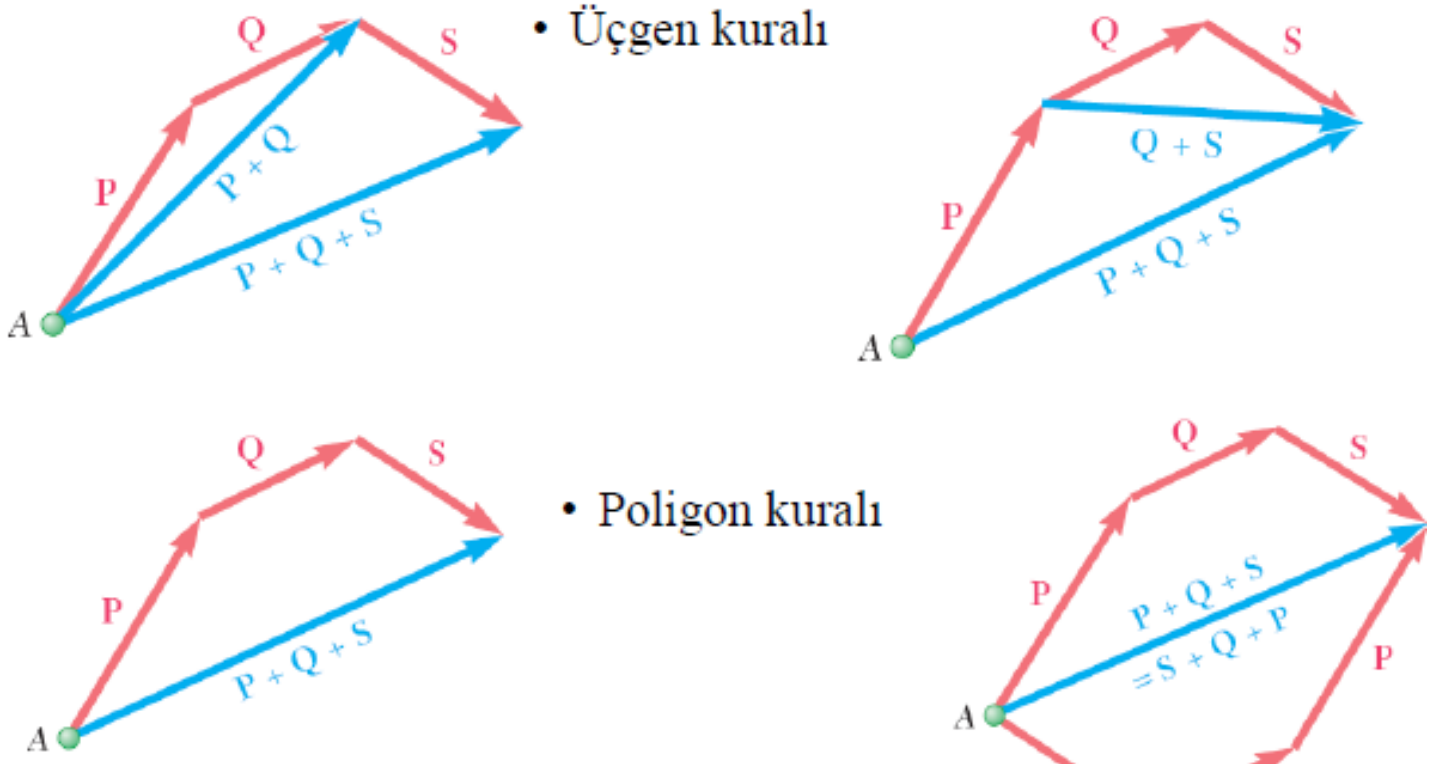
2. Üçgen metodu

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ verilen iki vektör ise $\vec{A}$ vektörünün ucundan(ok tarafı) $\vec{B}$ vektörüne paralel ve aynı şiddette bir vektör çizilir. $\vec{A}$ vektörünün başlangıç noktası ile $\vec{B}$ vektörünün uc noktasını birleştiren doğru $\vec{R}$ bilişke vektörünün şiddetini $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ ye doğru $\vec{R}$ nin yönü bulunur. Şekil 2.3'de üçgen metodunun uygulaması görülmektedir.



3. Poligon metodu

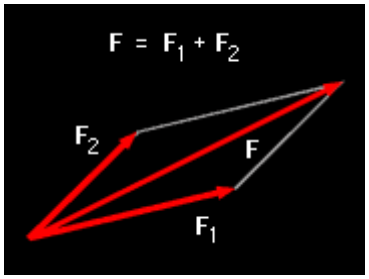
Bu metot üçgen metodun genişletilmiş halidir. İkiden fazla vektörün toplanması için kullanılan geometrik bir toplama metodudur. İlk çizilen vektörün başlangıç noktası ile son çizilen vektörün bitim noktası birleştirilirse R bileşke kuvveti; şiddet ve yön olarak bulunmuş olur.



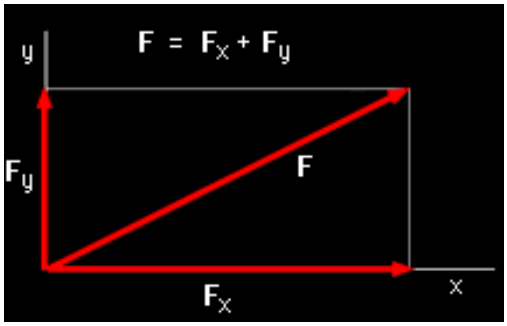
• Vektörlerin toplanması assosiyatiftir ,

$$\vec{P}+\vec{Q}+\vec{S}=\left(\vec{P}+\vec{Q}\right)+\vec{S}=\vec{P}+\left(\vec{Q}+\vec{S}\right)$$

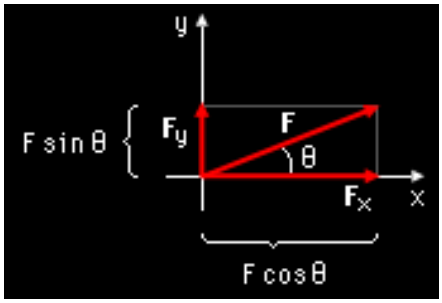
4. Analitik metot



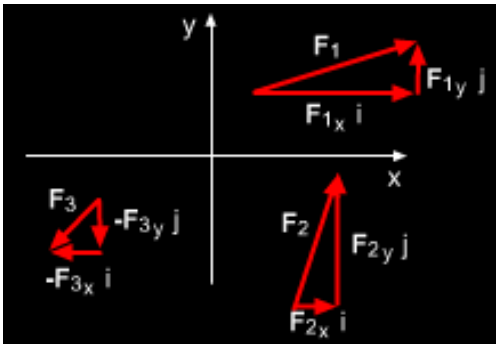
Yukarıda verildiği gibi dar veya geniş açılı vektör gurubunun bileşkesini bulmak veya bileşkesinden bileşenlerine ulaşmak matematik olarak uzun bir süreçtir. Uzayda bir vektörü (birbirine dik doğrultularda) kartezyen koordinat sisteminde F_x ve F_y gibi iki bileşene ayırmak mümkündür.



Vektörün eksenlerden birisi ile yaptığı açı θ ise Vektör sin(θ) ve cos(θ) ile çarpılarak dik koordinatlardaki izdüşümü bulunabilir.



Birden fazla vektörün bulunduğu kartezyen uzayda bileşke vektörü bulmak amacıyla herbir vektör bileşeni cebirsel olarak toplanır.

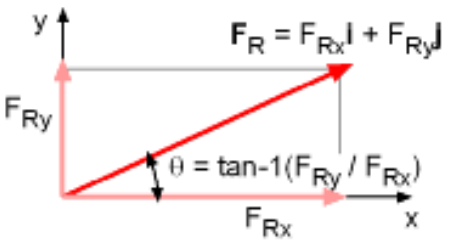


Vektörlerin x yönündeki bileşenleri *i* birim vektörü (uzunluğu bir birim olan vektör) ve y yönündeki bileşenleri *j* birim vektörleriyle temsil edilip gösterilmek üzere;

$$F_R = F_1 + F_2 + \ldots = \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j}$$

$$\text{where } \Sigma F_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots$$
$$\Sigma F_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots$$

Vektörlerin toplamı bileşke vektör olarak F_R ile gösterilir ve bileşenleriyle olan açısal ilişkisi aşağıdaki gibidir;

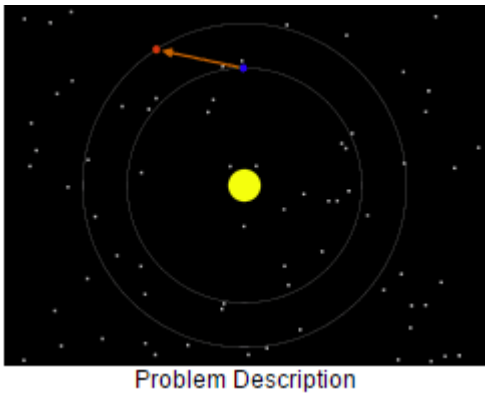


Vector Angle Relationship

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right)$$

Soru:


Problem Description

TUSAŞ insansız bir Mars yolculuğu planlamaktadır. Bunun için uzay aracının dünyaya göre en ideal fırlatılma konumunun (fırlatılma açısı ve en yakın uzaklığın sağlanacağı pozisyonun) bilinmesi gerekmektedir (En uygun fırlatılma tarihinin 2 aralık olduğu tespit edilmiştir). Eğer fırlatılma açısı ve aradaki mesafe yanlış hesaplanırsa uzay aracı kaybedilmiş olacaktır.

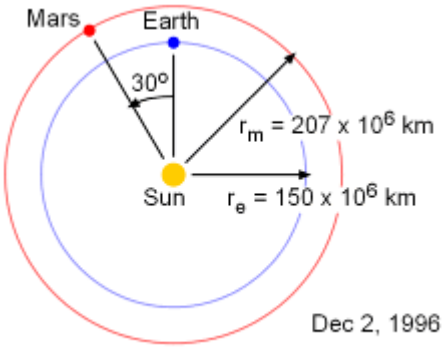
Fırlatılma günündeki Mars'ın Dünya'ya göre en uygun pozisyonunu bulunuz.

What is known:

- The radius of Earth's orbit r_e is 150 x 10^6 km.
- The radius of Mars's orbit r_m is 207 x 10^6 km.
- The angle α between Earth and Mars relative to the Sun is 30°.
- Assume both Earth's and Mars' orbits around the Sun is circular.

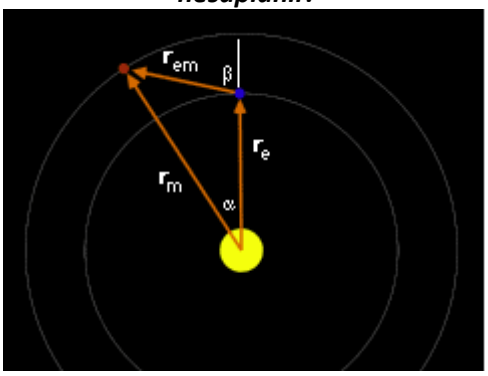
Çözüm:

İlk olarak problem diyagram halinde düşünülür.



Problem Diagram

Sonra verilenler arasında geometrik ilişkiler kurularak istenenler hesaplanır.



The position vector from the Sun to Earth is

$r_e = r_e \angle 0^o$ (counter-clockwise from vertical)

$= 150 \times 10^6$ km $\angle 0^o$

The position vector from the Sun to Mars:

$r_m = r_m \angle \alpha$

$= 207 \times 10^6$ km $\angle 30^o$

Next, form a triangle with the three vectors and use the Law of the Cosine,

$r_{em} = (r_e^2 + r_m^2 - 2r_e r_m \cos\alpha)^{0.5}$

$= 107.56 \times 10^6$ km (scalar only, not vector)

Then the internal angle θ, can be determined using the Law of the Sine,

$r_{em} / \sin\alpha = r_{em} / \sin\theta$

$\theta = \sin^{-1}(r_{em} \sin\alpha / r_{em}) = 105.79^o$

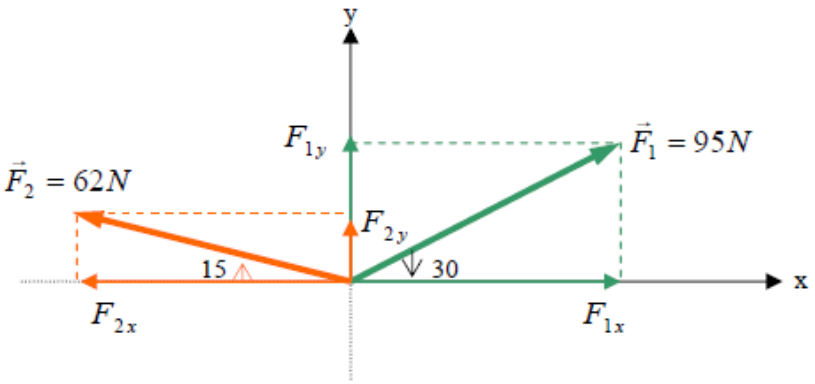
Finally, the desired angle β is

$\beta = 180^o - \theta = 74.21^o$

The position vector from Earth to Mars is

$r_{em} = 107.56 \times 10^6$ km $\angle 74.21^o$

Soru 1:



$F_{1x} = 95\cos 30 = 82.3N$

$F_{2x} = 62\cos 15 = -59.9\,\mathrm{N}$

$F_{1y} = 95\sin 30 = 47.5N$

$F_{2y} = 62\sin 15 = 16.1N$

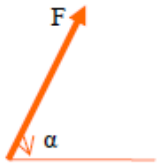
$\sum F_x = 22.4N$

$\sum F_Y = 63.6N$

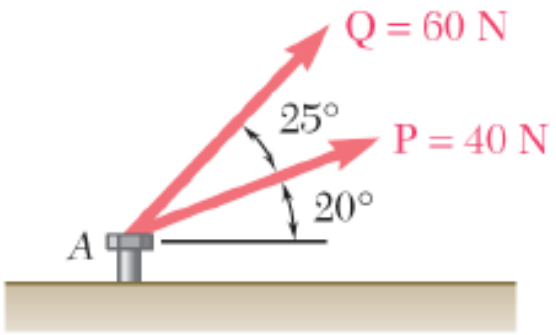
$F = \sqrt{(22.4)^2 + (63.16)^2} = 67{,}43\ N$

$\alpha = \tan^{-1}(63.6/22.4)$

$\alpha = 70{,}6^o$



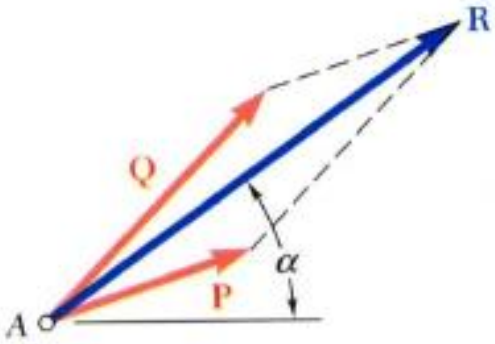
Örnek 2:



Cıvataya etki eden iki kuvvetin yerine geçecek bir tek bileşke kuvvet bulunuz.

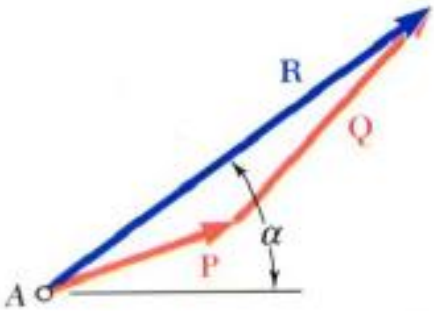
SOLUTION:

- Graphical solution - construct a parallelogram with sides in the same direction as **P** and **Q** and lengths in proportion. Graphically evaluate the resultant which is equivalent in direction and proportional in magnitude to the the diagonal.
- Trigonometric solution - use the triangle rule for vector addition in conjunction with the law of cosines and law of sines to find the resultant.



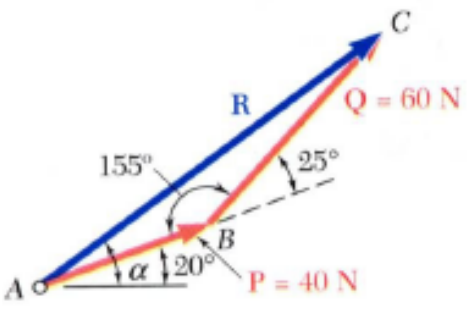
- Grafik çözüm – Parelel kenar kanunu ile

$$\boxed{\mathbf{R} = 98\text{ N} \quad \alpha = 35°}$$



- Grafik çözüm – Kapalı çokgen oluşturur.

$$\boxed{\mathbf{R} = 98\text{ N} \quad \alpha = 35°}$$



- Trigonometric çözüm - Apply the triangle rule.

From the Law of Cosines,

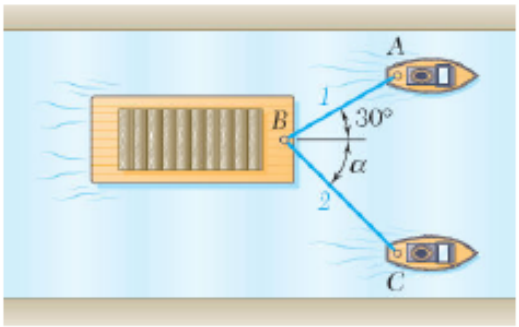
$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos B$$
$$= (40\text{N})^2 + (60\text{N})^2 - 2(40\text{N})(60\text{N})\cos 155°$$

$$\boxed{R = 97.73\text{N}}$$

From the Law of Sines,

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R}$$
$$\sin A = \sin B \frac{Q}{R}$$
$$= \sin 155° \frac{60\text{N}}{97.73\text{N}}$$
$$A = 15.04°$$
$$\alpha = 20° + A$$
$$\boxed{\alpha = 35.04°}$$

Soru 3:



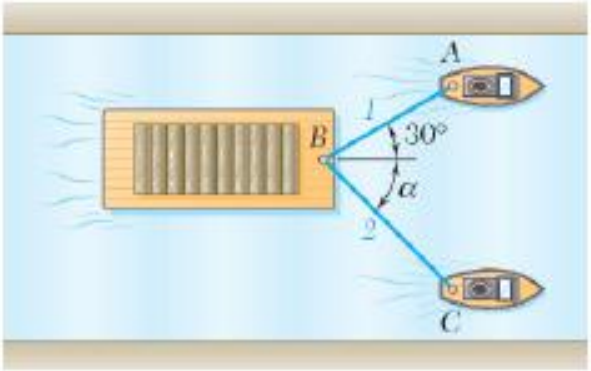
Şekilde görüldüğü gibi bir mavna iki römorkör tarafından çekiliyor. Römorkörlerin uyguladığı bileşke kuvvet mavnanın ekseni doğrultusunda 20 kN olduğuna göre

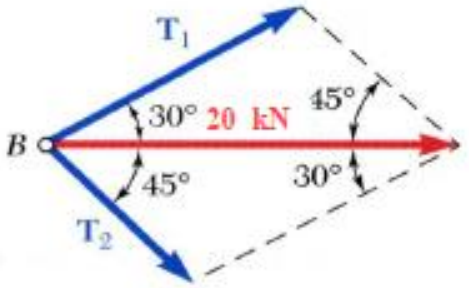
a) Her iki ipteki çekme kuvvetini hesaplayınız for α = 45°,

b) 2. ipteki kuvvetin en küçük olması için α ne olmalıdır.

Çözüm için Yol gösterme :

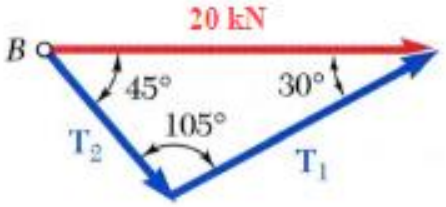
- Find a graphical solution by applying the Parallelogram Rule for vector addition. The parallelogram has sides in the directions of the two ropes and a diagonal in the direction of the barge axis and length proportional to 20 kN.
- Find a trigonometric solution by applying the Triangle Rule for vector addition. With the magnitude and direction of the resultant known and the directions of the other two sides parallel to the ropes given, apply the Law of Sines to find the rope tensions.
- The angle for minimum tension in rope 2 is determined by applying the Triangle Rule and observing the effect of variations in α.





- **Grafik çözüm** – Paralel kenar yasası ile; bileşke kuvvetin şiddeti ve yönü biliniyor,

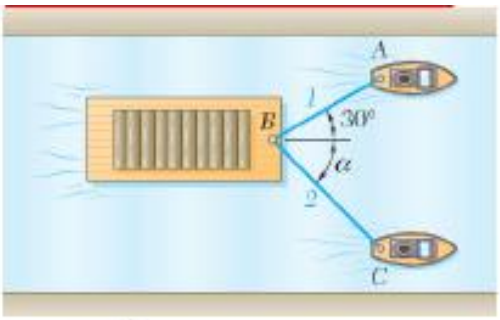
$$\boxed{T_1 \cong 14.6\ kN \quad T_2 \cong 10.3\ kN}$$



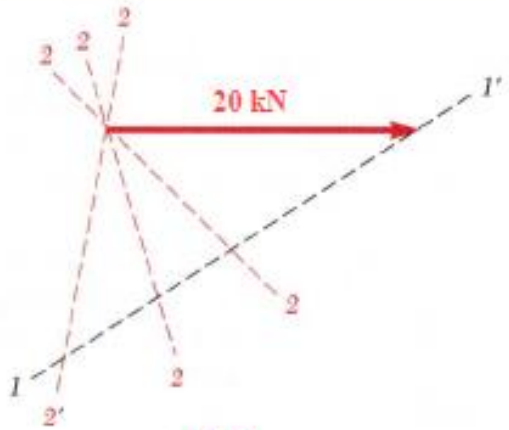
- **Trigonometric solution** - Triangle Rule with Law of Sines

$$\frac{T_1}{\sin 45°} = \frac{T_2}{\sin 30°} = \frac{20\,kN}{\sin 105°}$$

$$\boxed{T_1 = 14.64\ kN \quad T_2 = 10.35\ kN}$$



- The angle for minimum tension in rope 2 is determined by applying the Triangle Rule and observing the effect of variations in α.

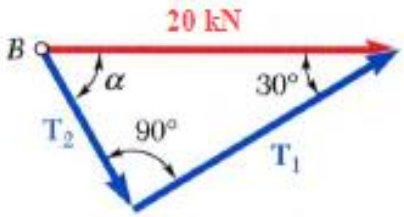


- 2. ipteki kuvvetin en küçük olduğu hal çok açıktır ki $\mathbf{T_1}$ and $\mathbf{T_2}$ birbirine dik olduğundadır

$$T_2 = (20\ kN)\sin 30° \qquad \boxed{T_2 = 10\ kN}$$

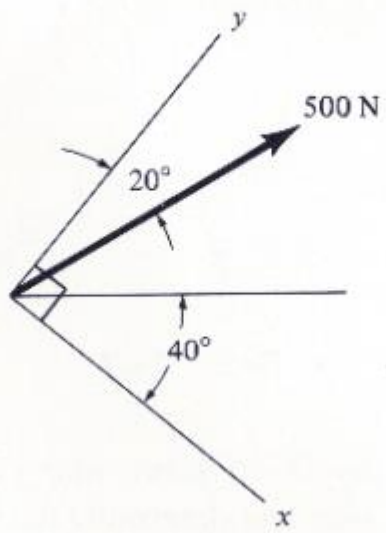
$$T_1 = (20\ kN)\cos 30° \qquad \boxed{T_1 = 17.32\ kN}$$

$$\alpha = 90° - 30° \qquad \boxed{\alpha = 60°}$$

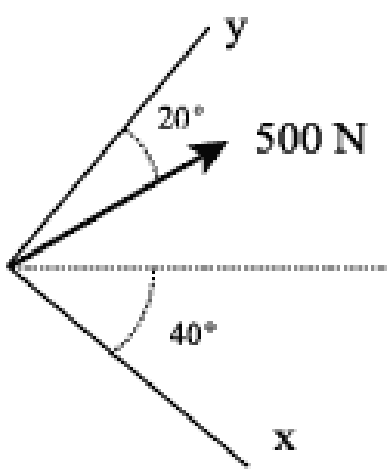


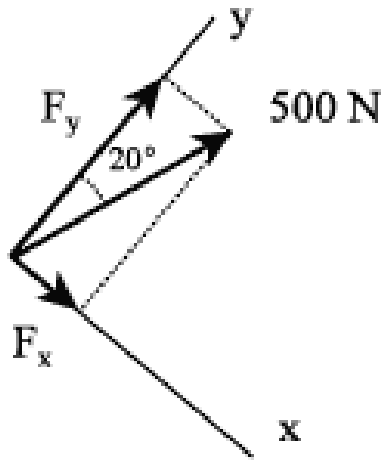
Soru 4:

Determine the x and y components of the 500-N force.



Determine the x and y components of the 500-N force.





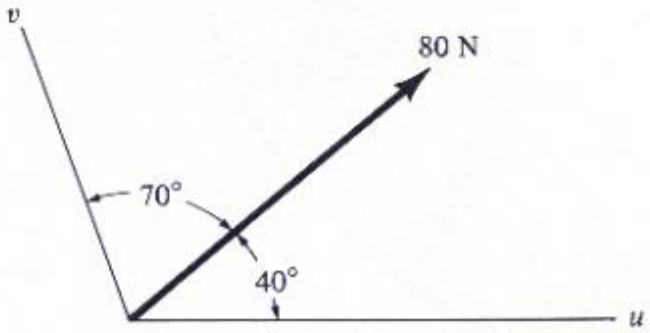
The 500-N force can be broken into x and y components as shown in the figure on the right.

Using simple trigonometry we find that:

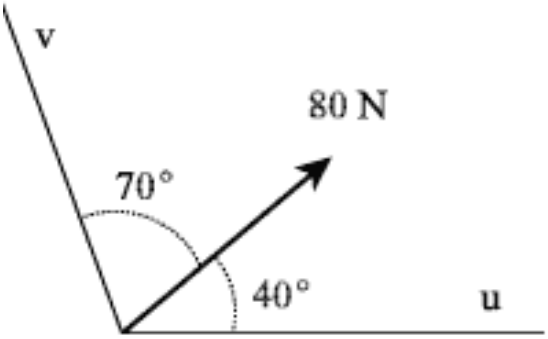
$$\begin{aligned} F_x &= 500\,N\,\sin[20°] \\ F_y &= 500\,N\,\cos[20°] \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} F_x &= 171.0\,N \\ F_y &= 470\,N \end{aligned}}$$

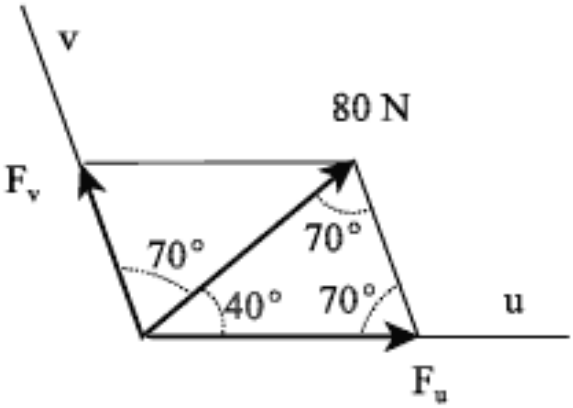
Soru 5:

Resolve the 80-N force into components acting along the u and v axes and determine the magnitudes of the components.



Resolve the 80-N force into components acting along the u and v axes and determine the magnitudes of the components.





The 80-N force can be broken into u and v components as shown in the figure on the right.

Using the law of sines we find that

$$\frac{80\,N}{\sin[70°]} = \frac{F_u}{\sin[70°]} = \frac{F_v}{\sin[40°]}$$

Thus

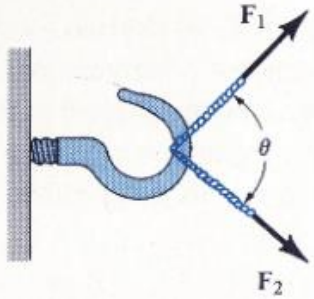
$$F_u = 80\,N\,\frac{\sin[70°]}{\sin[70°]}$$

$$F_v = 80\,N\,\frac{\sin[40°]}{\sin[70°]}$$

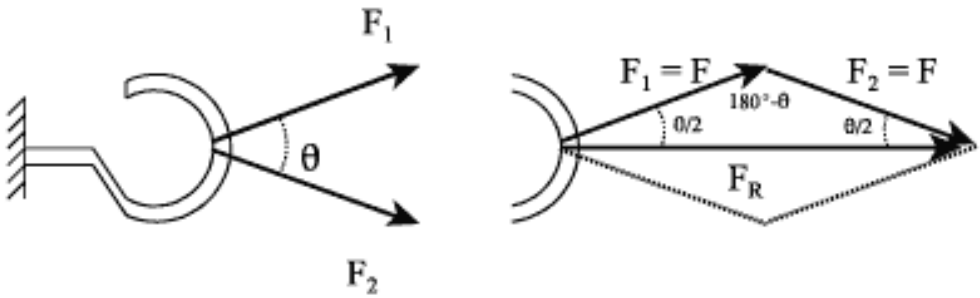
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} F_u &= 80\ N \\ F_v &= 54.7\ N \end{aligned}}$$

Soru 6:

2–19. Two forces $\mathbf{F}_1$ and $\mathbf{F}_2$ act on the hook. If their lines of action are at an angle θ apart and the magnitude of each force is $F_1 = F_2 = F$, determine the magnitude of the resultant force $\mathbf{F}_R$ and the angle between $\mathbf{F}_R$ and $\mathbf{F}_1$.



Two forces $\mathbf{F}_1$ and $\mathbf{F}_2$ act on the hook. If their lines of action are at an angle θ apart and the magnitude of each force is $F_1 = F_2 = F$, determine the magnitude of the resultant force $\mathbf{F}_R$ and the angle between $\mathbf{F}_R$ and $\mathbf{F}_1$.



We can add the 2 forces using the triangle shown on the right. . Now using the law of sines we can find F_R

$$\frac{F_R}{\sin[180°-\theta]} = \frac{F}{\sin[\theta/2]}$$

We can now solve for F_R and rearrange the answer using some trigonometric identities:

$$F_R = F\frac{\sin[180°-\theta]}{\sin[\theta/2]} = F\frac{\sin[180°]\cos\theta - \cos[180°]\sin\theta}{\sin[\theta/2]}$$

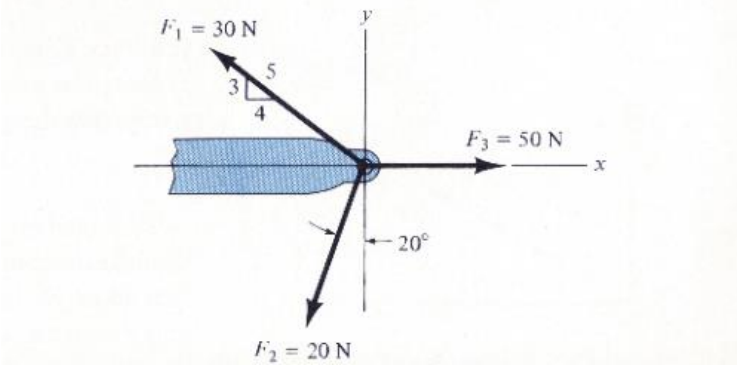
$$F_R = F\frac{\sin\theta}{\sin[\theta/2]} = F\frac{2\sin[\theta/2]\cos[\theta/2]}{\sin[\theta/2]}$$

Thus $\boxed{F_R = 2F\cos[\theta/2]}$

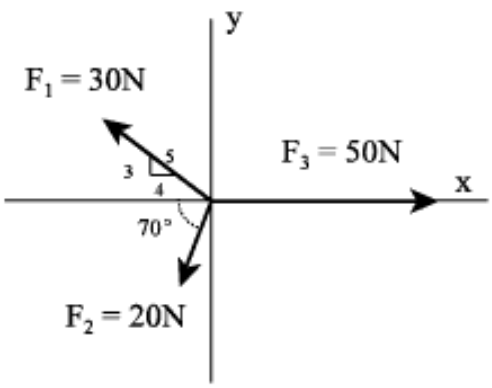
From the picture we see that the desired angle between $\mathbf{F}_1$ and $\mathbf{F}_R$ is $\left|\frac{\theta}{2}\right|$

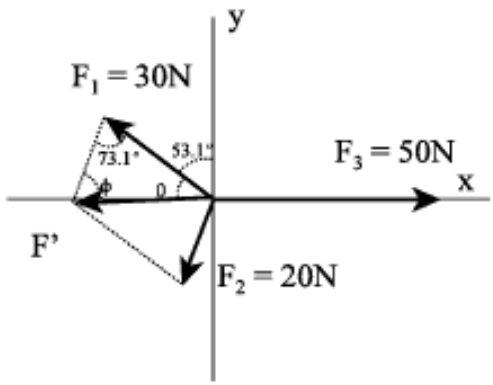
Soru 7:

***2–20.** Determine the magnitude and direction of the resultant $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$ of the three forces by first finding the resultant $\mathbf{F}' = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ and then forming $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}' + \mathbf{F}_3$.



Determine the magnitude and direction of the resultant $F_R = F_1 + F_2 + F_3$ of the three forces by first finding the resultant $F' = F_1 + F_2$ and then forming $F_R = F' + F_3$.



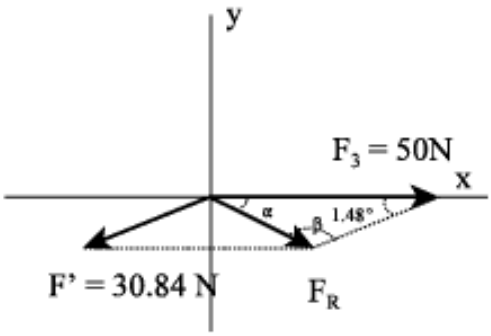


We first use the 3-4-5 triangle to find the 53.1° angle shown in the picture on the right and then discover the 73.1° angle also shown in the picture. From the law of sines we can find the magnitude F' and the angle θ. We first note that $\phi = 180° - 73.1° - \theta$.

$$\frac{F'}{\sin(73.1°)} = \frac{20\,N}{\sin\theta} = \frac{30\,N}{\sin(180° - 73.1° - \theta)}$$

The solution gives:

$$\boxed{F' = 30.84\,N,\ \theta = 38.4°}$$



We are now ready to combine F' and F_3 which lie almost in a straight line so the picture is hard to see. Let's exaggerate the small angle in order to see what's happening.

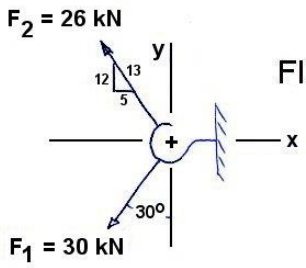
$$\frac{F_R}{\sin(1.48°)} = \frac{30.84\,N}{\sin\alpha} = \frac{50\,N}{\sin(180° - 1.48° - \alpha)}$$

These equations give

$$\boxed{F_R = 19.2\,N,\ \alpha = 2.38°}$$

Soru 8:

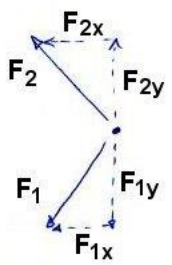
Example: Addition of a system of coplanar forces



FIND: (a) Magnitude & direction of resultant force relative to the positive x- axis.

(b) express the answer in cartesian vector format.

(a) **(1)** Free Body Diagram with x and y components shown at left. Static equilibrium equations are written adding respective x and y components together.



$$+\uparrow \Sigma F_y: \left(\tfrac{12}{13}\right)F_2 - F_1\cos 30 = F_{RY}$$

$$F_{RY} = \left(\tfrac{12}{13}\right)(26) - (30)(\cos 30)$$

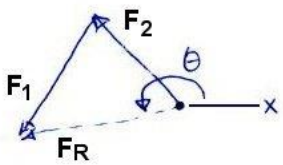
$$F_{RY} = -1.981\ \text{kN}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x: -\left(\tfrac{5}{13}\right)F_2 - F_1\sin 30 = F_{RX}$$

$$F_{RX} = -\left(\tfrac{5}{13}\right)(26) - 30\sin 30$$

$$F_{RX} = -25\ \text{kN}$$

(2) Find the resultant force magnitude and direction

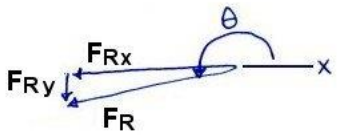


$$F_R = \sqrt{(1.981)^2 + (-25)^2}$$

$$\boxed{F_R = 25.1\ \text{kN}}$$ ← **scalar notation**

OR

$$\theta = 180° + \tan^{-1}\left(\frac{1.981}{25}\right)$$



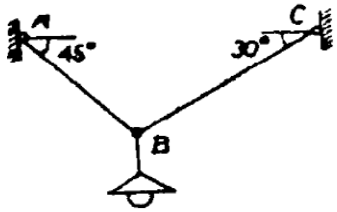
$$\boxed{\theta = 184.5°}$$ ← **scalar notation**

(b)

$$\boxed{\vec{F_R} = -25\hat{i} - 1.981\hat{j}}$$ ← **Cartesian vector notation**

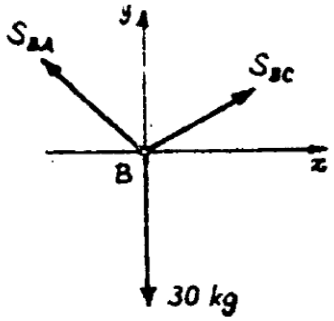
$$\left(\vec{u_R} = -\frac{25}{25}\hat{i} - \frac{1.981}{25}\hat{j} \right.$$ ← **unit vector** $\Big)$

Soru 9:



Prob. 1.6. 30 kg ağırlığında bir lamba, yatayla 45° ve 30° lik açılar yapan AB ve BC ipleri vasıtasıyla A ve C noktalarına asılmıştır. AB ve BC iplerinde oluşacak kuvvetlerin yön ve şiddetlerini analitik olarak bulunuz.

ÇÖZÜM:



AB ve BC iplerinde oluşan kuvvtler ile lambanın ağırlığı bir noktada (B noktası) kesişen kuvvetler sistemidir. İplerdeki kuvvetlerin yönleri şekilde gösterildiği gibi seçilebilir. Böylece

$$\Sigma X = 0$$

$$\Sigma Y = 0$$

denge denklemleri şekildeki koordinat sistemine göre yazılırsa

$\Sigma X = 0 \quad (+\rightarrow)$ $\qquad S_{BC} \cos 30° - S_{BA} \cos 45° = 0$

$$0{,}866\, S_{BC} - 0{,}707\, S_{BA} = 0 \qquad (1)$$

$\Sigma Y = 0 \quad (\uparrow +)$ $\quad S_{BC} \sin 30° + S_{BA} \,.\, \sin 45° - 30 = 0$

$$0{,}500\, S_{BC} + 0{,}707\, S_{BA} = 30 \qquad (2)$$

elde edilir.

(1) ve (2) denklemlerinden

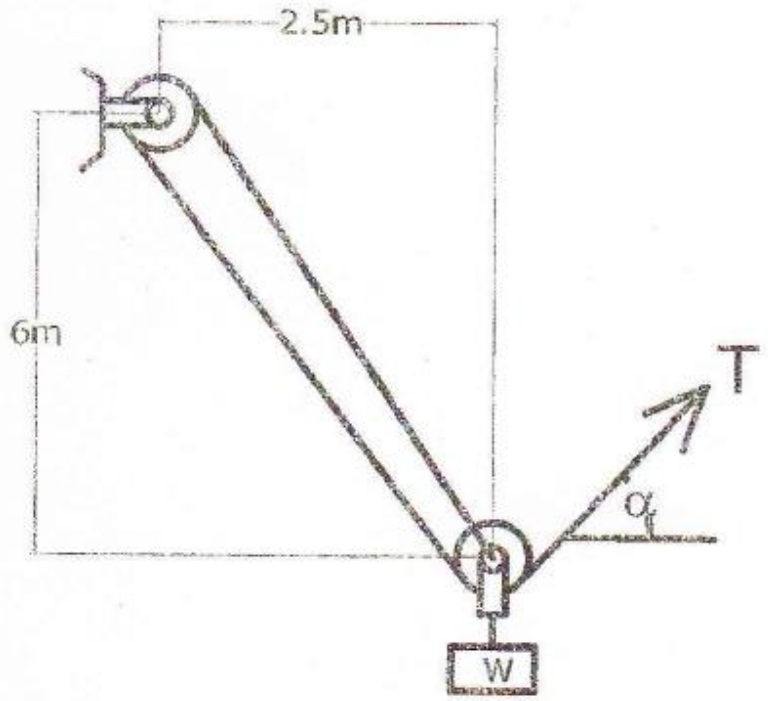
$$S_{BC} = 21{,}96 \text{ kg}$$

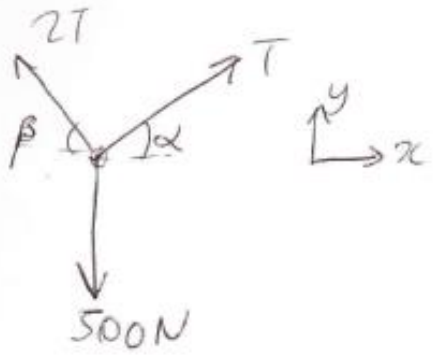
$$S_{BA} = 26{,}90 \text{ kg}$$

bulunur. Sonuç değerlerin işareti (+) çıktığına göre seçilen yön doğru demektir. İşaretin (−) çıkması seçilen yönün ters olduğu anlamına gelir.

Soru 10:

S1. 500N ağırlığında bir sandık ip ve makara düzeni ile askıda durmaktadır. T kuvveti için gerekli şiddet ve doğrultuyu hesaplayınız.





$\tan\beta = \frac{6}{2,5} \Rightarrow \beta = 67,4^0$

$\Sigma f_x = 0 \Rightarrow 2T\cos\beta = T.\cos\alpha.$

$\cos\alpha = 2\cos(67,4^0)$

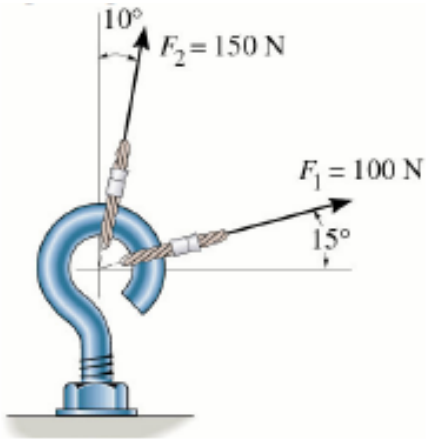
$\alpha = 39,7^0$ · doğrultu.

$\Sigma f_y = 0 \Rightarrow 2T.\sin\beta + T\sin\alpha - 500 = 0$

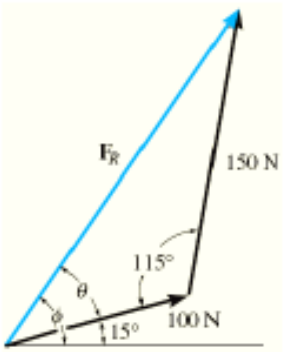
$2,485T = 500$

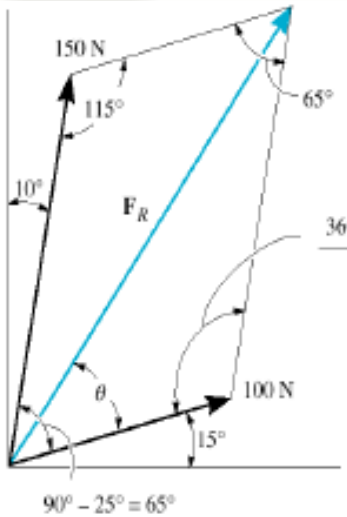
$T = 201.2\ N.$

Soru 11



Yanda görülen cıvataya etki eden bileşke kuvvetin şiddetini ve yönünü belirleyiniz.





Calculate angles

Angle COA = 90^0 -15^0-10^0= 65^0

Angle OAB = 180^0 -65^0= 115^0

$$\frac{360° - 2(65°)}{2} = 115°$$

Find F_R from law of cosines.
Find θ from law of sines.
Angle $\phi = \theta + 15^0$

$$F_R = \sqrt{(100\text{N})^2 + (150\text{N})^2 - 2(100\text{N})(150\text{N})\cos 115^\circ}$$
$$= 212.6\text{N}$$

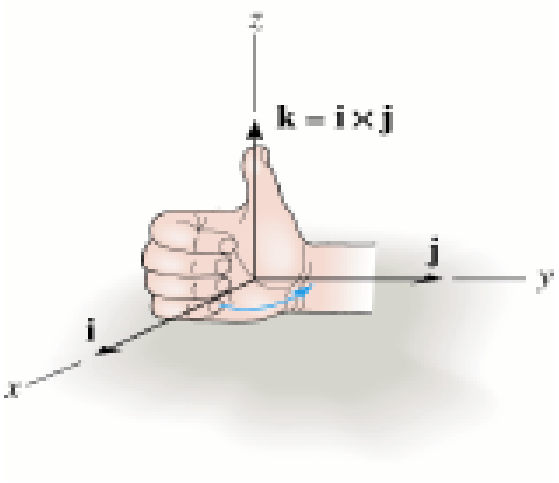
$$\frac{150\text{ N}}{\sin\theta} = \frac{212.6\text{ N}}{\sin 115^\circ} \quad \Rightarrow \quad \theta = 39.8^\circ$$

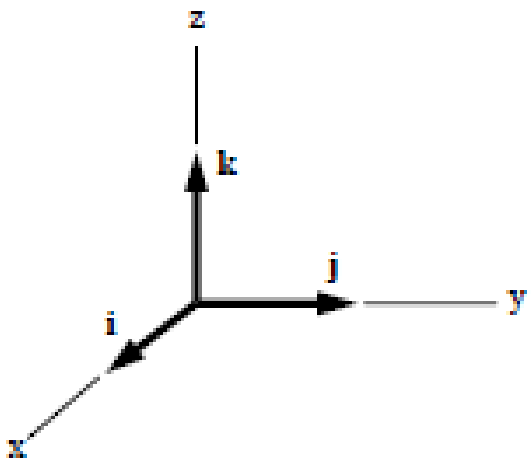
$$\phi = \theta + 15^\circ = 54.8^\circ$$

Bir kuvvetin dik bileşenleri: Birim vektörler

Şimdiye kadar bir düzlem içinde bulunan vektörlerden bahsettik. Uzayda yukarıdaki yöntemlerle vektörel işlemleri yapmak zordur. Uzayda vektörleri üç dik eksendeki bileşenleri ile yazmak gerekir. Bunun için birim vektörleri tanımlamak gerekmektedir. Bu vektörler sırasıyla x, y, z eksenleri boyunca i, j, k olarak bilinir.

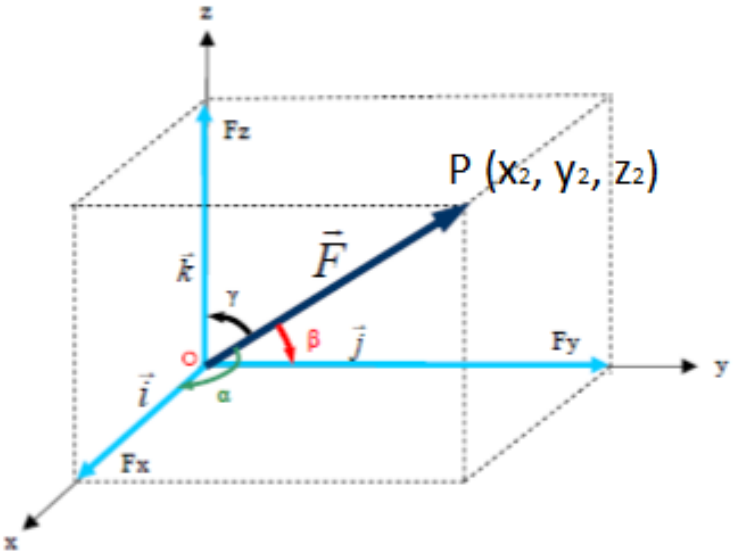
Bu vektörlerin boyları bir birimdir. Bir skaler ile bir vektörün çarpımı da aynı yönde bir vektör vermesi tanımından, uzaydaki bir vektörü aşağıdaki gibi yazabiliriz.





Bir $\vec{F}$ vektörünün büyüklüğü (normu), $|\vec{F}|$ ile gösterilen ve değeri $|\vec{F}| = (F_x + F_y + F_z)^{1/2}$ olarak ifade edilen bir reel sayıdır. Bu tanımdan görüyoruz ki $|\vec{F}| = 0$ olması ancak $\vec{F} = 0$ olması halinde mümkündür. Aksi halde daima $|\vec{F}| > 0$ dır.

Büyüklüğü 1'e eşit olan vektöre BİRİM VEKTÖR denir. Bir vektörü geometrik olarak şu şekilde gösterebiliriz:



Sıfırdan farklı bir $\vec{F}$ vektörü göz önüne alalım. P noktasının koordinatları $P(x_2, y_2, z_2)$ olan bir nokta olmak üzere $\vec{F}$ vektörünü daima $\overrightarrow{OP}$ yönlendirilmiş doğru parçası ile gösterebiliriz.

$\overrightarrow{OP}$ **vektörünün doğrultusu ve yönü DOĞRULTMAN kosinüsleri denilen** $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ **sayı üçlüsü ile belirlenir.**

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{|\vec{F}|}, \qquad \cos\beta = \frac{F_y}{|\vec{F}|}, \qquad \cos\gamma = \frac{F_z}{|\vec{F}|}$$

olup bu değerler $\overrightarrow{OP}$ vektörünün bileşenleri ile orantılıdır. $\overrightarrow{OP}$ ye $\vec{F}$ vektörünün geometrik gösterimi diyeceğiz.

Doğrultman kosinüsleri için, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ önemli eşitliği vardır.

Bu durum bize gösteriyor ki sıfırdan farklı olan her vektör kendi doğrultu ve yönünde bir birim vektöre sahiptir.

Not: Uzayda bir vektör başlangıç noktası keyfi alındığı zaman bitim noktası tarafımızdan belirlenecek iki noktayı birleştiren doğru parçası olarak bilinir.

A vektörü doğrultusundaki (boyunca) birim vektör λ_A ise şu şekilde tanımlanabilir.

$$\lambda_A = \frac{\vec{F}}{F} = \frac{F_x}{|F|}i + \frac{F_y}{|F|}j + \frac{F_z}{|F|}k = \mathrm{Cos}(\alpha)\, i + \mathrm{Cos}(\beta)\, j + \mathrm{Cos}(\gamma)\, k$$

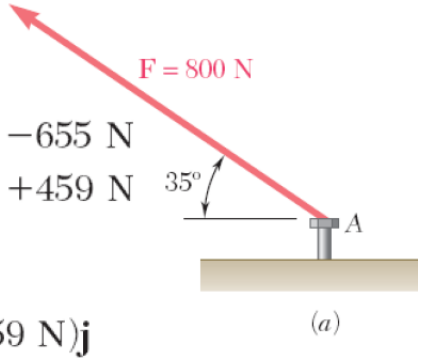
$$\vec{F} = F\lambda_A = F\mathrm{Cos}(\alpha)\, i + F\mathrm{Cos}(\beta)\, j + F\mathrm{Cos}(\gamma)\, k$$

Eğer bilinen vektörler $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$,.....$\mathbf{F_n}$ ise bu vektörlerin toplamı $\vec{F}_R$ vektörü şu şekilde yazılabilir.

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F} = \sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j} + \sum F_z \vec{k}$$

Soru 12

Cıvataya etki eden 800 N luk kuvvetin dik bileşenlerini belirleyiniz.



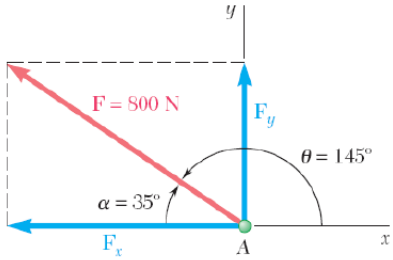
$$F_x = -F\cos\alpha = -(800\text{ N})\overset{(0.819)}{\cos 35^\circ} = -655\text{ N}$$
$$F_y = +F\sin\alpha = +(800\text{ N})\sin 35^\circ = +459\text{ N}$$

The vector components of **F** are thus

$$\mathbf{F}_x = -(655\text{ N})\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_y = +(459\text{ N})\mathbf{j}$$

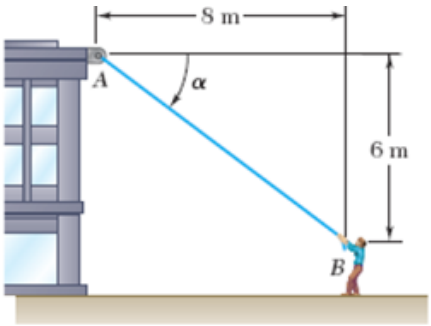
and we may write **F** in the form

$$\mathbf{F} = -(655\text{ N})\mathbf{i} + (459\text{ N})\mathbf{j}$$



Soru 13

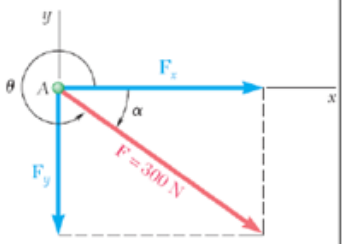
Şekildeki gibi bir adam A da çatıya bağlanmış ipi 300 N luk bir kuvvet ile çekmektedir. Bu kuvvetin A noktasındaki yatay ve düşey bileşenlerini bulunuz.



$$F_x = +(300\text{ N})\cos\alpha \qquad F_y = -(300\text{ N})\sin\alpha$$

Observing that $AB = 10$ m, we find from Fig. 2.23*a*

$$\cos\alpha = \frac{8\text{ m}}{AB} = \frac{8\text{ m}}{10\text{ m}} = \frac{4}{5} \qquad \sin\alpha = \frac{6\text{ m}}{AB} = \frac{6\text{ m}}{10\text{ m}} = \frac{3}{5}$$



We thus obtain

$$F_x = +(300\text{ N})\tfrac{4}{5} = +240\text{ N} \qquad F_y = -(300\text{ N})\tfrac{3}{5} = -180\text{ N}$$

and write

$$\mathbf{F} = (240\text{ N})\mathbf{i} - (180\text{ N})\mathbf{j}$$

yönü

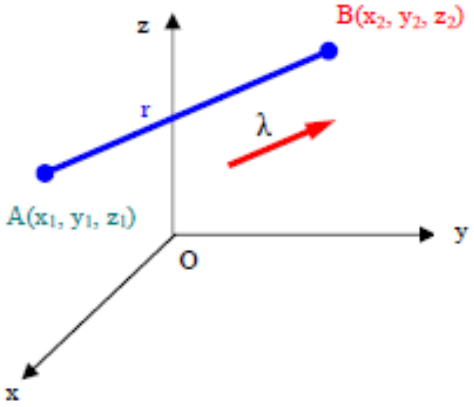
$$\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x}$$
$$\alpha = -36.87^\circ$$

şiddeti

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$
$$F = 300\,N$$

© 2008 NM

Uzayda iki nokta arasında tanımlanmış kuvvetler



Eğer koordinat eksenleri vektörün başlangıcında geçmiyor ve başlangıç noktası $A(x_1, y_1, z_1)$ ve bitim noktası $B(x_2, y_2, z_2)$ olarak verilmiş bir $\vec{F}$ vektörü şöyle yazılabilir. Şekil 2.9'da böyle bir vektörü göstermektedir.

$$\vec{r} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} \quad \text{veya}$$

$$\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

şeklinde yazılabilir.

A-B doğrusu üzerindeki birim vektör şu şekilde tanımlanabilir.

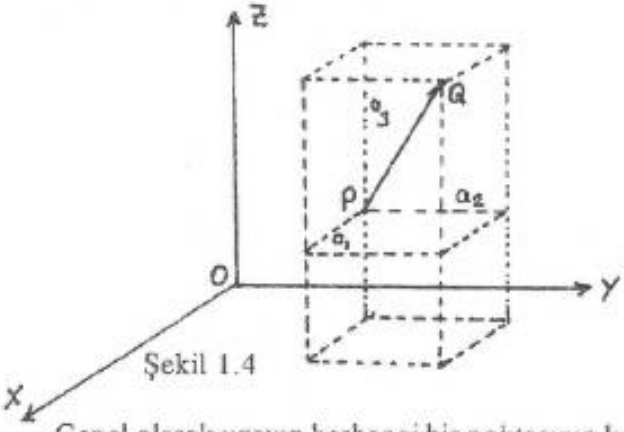
$$\lambda = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

A-B boyunca meydana gelen vektör ve değeri, A-B nin koordinatlarından tanımlanabilir.

$$\vec{F} = F\frac{\vec{r}}{r} = F\,\lambda$$

Soru 14

Örnek 1.2.1 : $P=(x_1,y_1,z_1)$ başlangıç noktası olarak seçilirse bitim noktası Q olan öyle bir noktanın koordinatları $Q=(x_1+a_1,y_1+a_2,z_1+a_3)$ olup bu iki noktayı birleştiren doğru parçası $\vec{PQ}$ vektörüdür.



$P=(x_1,y_1,z_1)$
$Q=(x_1+a_1,y_1+a_2,z_1+a_3)$

Şekil 1.4

Genel olarak uzayın herhangi bir noktasının koordinatları (x_1,y_1,z_1) ve başka bir noktasının koordinatları (x_2,y_2,z_2) ise bu iki noktayı birleştiren vektörün bileşenleri

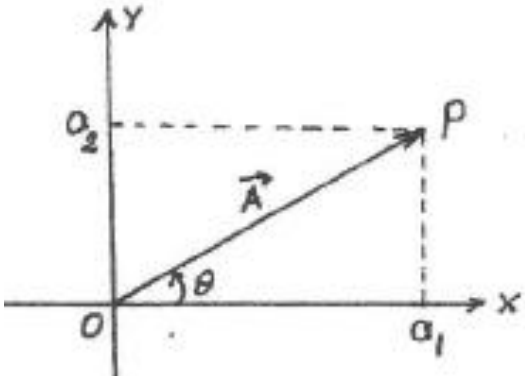
$a_1=x_2-x_1$
$a_2=y_2-y_1$
$a_3=z_2-z_1$ elde edilir.

Vektörler üç boyutlu uzayda olduğu gibi düzlemde (iki boyutlu uzay) ya da bir doğru (bir boyutlu uzay) üzerinde göstermek veya koordinatlarını belirlemek mümkündür.

Üçten büyük ($n > 3$) boyutlu uzaylarda da vektörler bileşenleri ve diğer cebirsel özellikleri ile tanımlanabilirler. Fakat geometrik olarak Şekil üzerinde gösterilemezler.

Soru 15

Örnek 1.2.2 : Düzlemde bir $\vec{A}$ vektörünü tanımlayıp, doğrultman kosinüslerini bulunuz ?



$$\vec{A} = \vec{OP} = (a_1, a_2)$$

$$\left\|\vec{A}\right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Doğrultman Kosinüsler

$$\cos\theta = \frac{a_1}{\|A\|}, \quad \sin\theta = \frac{a_2}{\|A\|}$$

Soru 16

Örnek 1.2.3 : Bir $\vec{A}$ vektörü P(2,-1,3) ve Q(-1,-2,4) noktalarını birleştiren $\vec{PQ}$ yönlendirilmiş doğru parçasına karşı gelmektedir. Bu vektörün bileşenlerini ve büyüklüğünü bulunuz ?

Çözüm : $\vec{A}$ nın bileşenlerine a_1, a_2, a_3 denirse

$a_1 = q_1 - p_1 = -1-2 = -3$
$a_2 = q_2 - p_2 = -2-(-1) = -1$
$a_3 = q_3 - p_3 = 4-3 = 1$

O halde $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3) = (-3,-1,1)$ olduğundan $\vec{A}$ nün büyüklüğü, $\|\vec{A}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$ dir.

Soru 18

Örnek 1.2.4 : $\vec{A} = (2,-1,2)$ vektörünün doğrultman kosinüslerini bulunuz ?

Çözüm :

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{Cos}\alpha = \frac{a_1}{\|\vec{A}\|} = \frac{2}{3}, \quad \text{Cos}\beta = \frac{a_2}{\|\vec{A}\|} = \frac{-1}{3}, \quad \text{Cos}\gamma = \frac{a_3}{\|\vec{A}\|} = \frac{2}{3}$$

elde edilir.

Soru 19

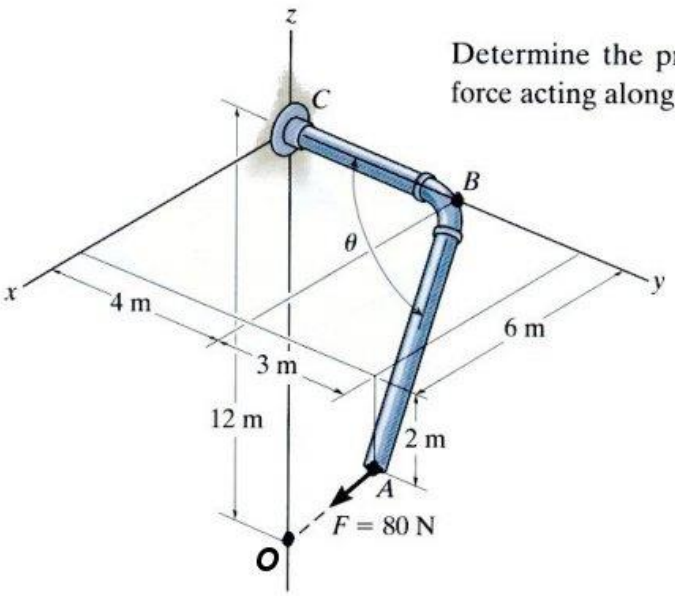
Örnek 1.2.5 : $\vec{A} = (-1, \sqrt{3})$ vektörünün büyüklüğünü ve doğrultman kosinüslerini bulunuz ?

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Cos}\alpha = \frac{a_1}{\|\vec{A}\|} = \frac{-1}{2} = \text{Cos}\theta, \quad \text{Cos}\beta = \frac{a_2}{\|\vec{A}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{Sin}\theta$$

ise $\theta = 120^\circ$ olur.

Soru 20



Determine the projected component of the 80-N force acting along the axis AB of the pipe.

(1) Find position vector from A to O

PT COORDINATES $\begin{cases} B(0,4,0) \\ A(6,7,-2) \\ O(0,0,-12) \end{cases}$

$\vec{r}_{AO} = (0-6)\hat{i} + (0-7)\hat{j} + (-12-(-2))\hat{k}$

$\vec{r}_{AO} = -6\hat{i} - 7\hat{j} - 10\hat{k}$

(2) Find unit vector AO

$|r_{AO}| = \sqrt{6^2+7^2+10^2} = 13.6$

$\vec{u}_{AO} = \dfrac{\vec{r}_{FA}}{|r_{FA}|} = -\dfrac{6}{13.6}\hat{i} - \dfrac{7}{13.6}\hat{j} - \dfrac{10}{13.6}\hat{k}$

$\vec{u}_{AO} = -0.4412\hat{i} - 0.5147\hat{j} - 0.7353\hat{k}$

(3) Express 80 N force in cartesian vector format

$\vec{F} = (80N)(-0.4412\hat{i} - 0.5147\hat{j} - 0.7353\hat{k})$

$\vec{F} = \{-35.3\hat{i} - 41.2\hat{j} - 58.8\hat{k}\}\ N$

(4) Find position vector AB

$\vec{r}_{AB} = (0-6)\hat{i} + (4-7)\hat{j} + (0-(-2))\hat{k}$

$\vec{r}_{AB} = -6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

(5) Find unit vector AB

$|r_{AB}| = \sqrt{(-6)^2+(-3)^2+(2)^2} = 7$

$\vec{u}_{AB} = -\frac{6}{7}\hat{i} - \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k}$

(6) Find the component of the 80 N force acting along AB.

Calculate the dot product $\vec{F}_{80N} \cdot \vec{U}_{AB}$

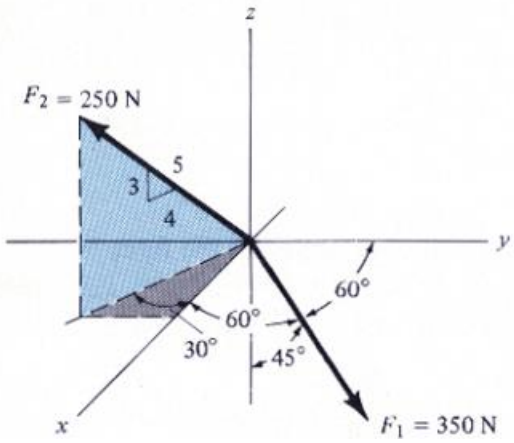
$F_{AB} = \vec{F} \cdot \vec{u}_{AB}$

$F_{AB} = (-35.3\hat{i} - 41.2\hat{j} - 58.8\hat{k}) \cdot (-\frac{6}{7}\hat{i} - \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k})$

$F_{AB} = 30.3 + 17.7 - 16.8 = \boxed{31.1\ N}$

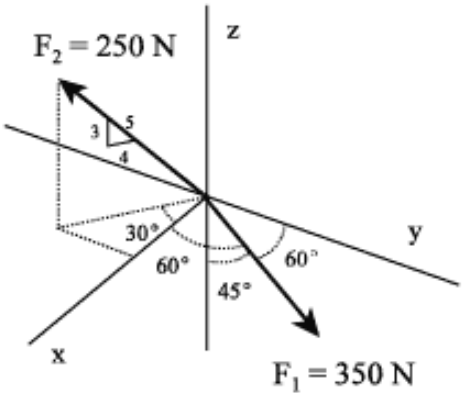
Ödev-1

2–43. Express each force in Cartesian vector form.



Hibbeler 4th edition 2-43

Determine the magnitude and coordinate direction angles of the resultant force and sketch this vector on the coordinate system.



We will first express each vector in Cartesian form:

$$\mathbf{F}_1 = 350\,N\,(\cos[60°]\mathbf{i} + \cos[60°]\mathbf{j} - \cos[45°]\mathbf{k})$$
$$\mathbf{F}_1 = [175\mathbf{i} + 175\mathbf{j} - 247\mathbf{k}]N$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{4}{5}250\,N\cos[30°]\mathbf{i} - \frac{4}{5}250\,N\sin[30°]\mathbf{j} + \frac{3}{5}250\,N\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F}_2 = [173.2\mathbf{i} - 100.0\mathbf{j} + 150.0\mathbf{k}]N$$

Now we can find the resultant by adding components:

$$\mathbf{F}_R = [(175 + 173.2)\mathbf{i} + (175 - 100)\mathbf{j} + (-247 + 150)\mathbf{k}]N$$
$$\mathbf{F}_R = [348\mathbf{i} + 75\mathbf{j} - 97.5\mathbf{k}]N$$

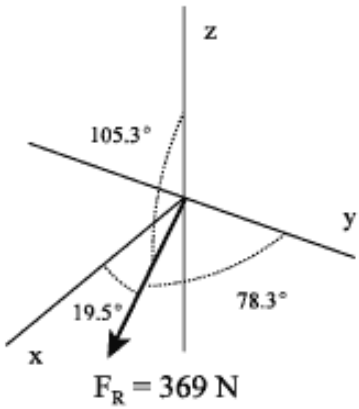
The magnitude is

$$F_R = \sqrt{(348)^2 + (75)^2 + (97.5)^2}\,N \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_R = 369\,N}$$

The coordinate direction angles are then:'

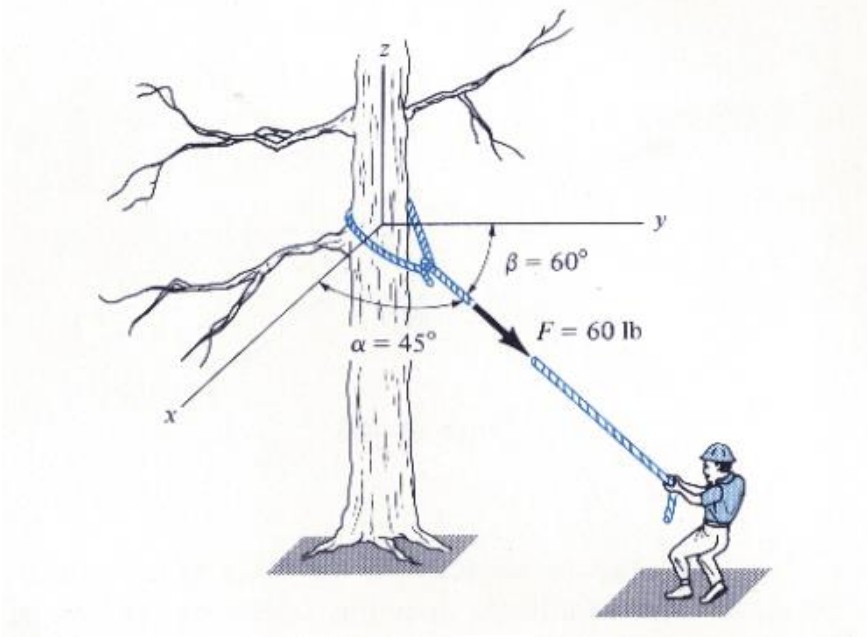
$$\cos\alpha = \frac{348.2\,N}{369\,N} = 0.943$$
$$\cos\beta = \frac{75\,N}{369\,N} = 0.203 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned}\alpha &= 19.5°\\ \beta &= 78.3°\\ \gamma &= 105.3°\end{aligned}}$$
$$\cos\gamma = \frac{-97.5\,N}{369\,N} = -0.264$$

Here's the picture →



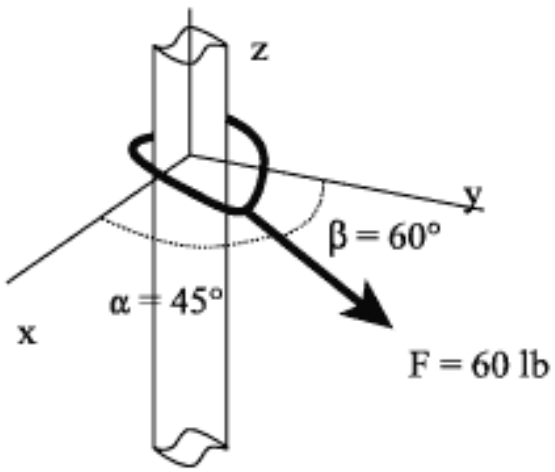
Ödev-2

***2–44.** The man pulls on the rope with a force of 60 lb. If **F** acts within the octant shown, such that $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, determine the x, y, z components of **F**.



Hibbeler 4th edition 2-44

The man pulls on the rope with a force of 60 lb. If **F** acts within the octant shown, such that $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, determine the x, y, z components of **F**.



Our first job is to determine the unknown coordinate direction angle γ. The coordinate direction angles have the following property:

$$(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1$$

We can use this relation to find γ

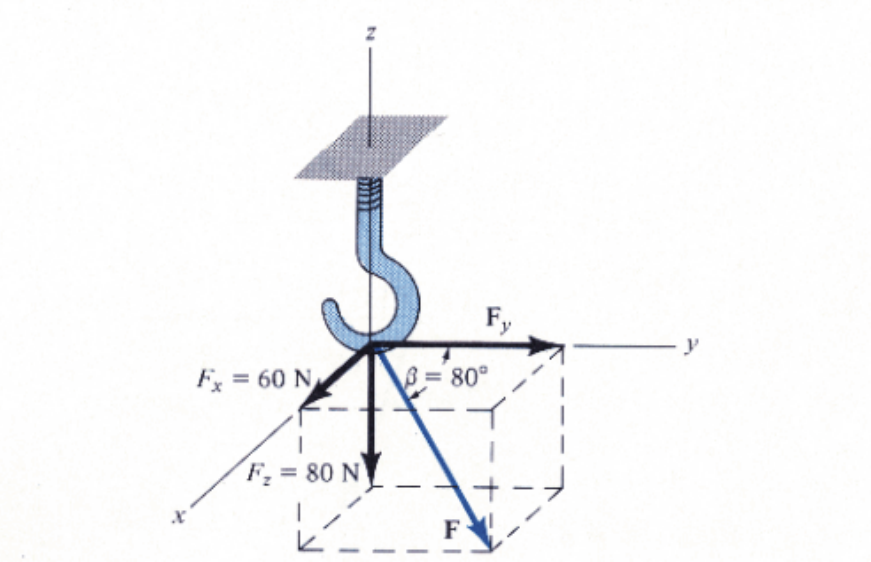
$$\cos\gamma = \sqrt{1 - (\cos[45°])^2 - (\cos[60°])^2} = 0.5$$

This means that $\gamma = 60°$ or $\gamma = 120°$. To keep the force in the correct quadrant we need to use $\gamma = 120°$. We can now find the components of the force **F**.

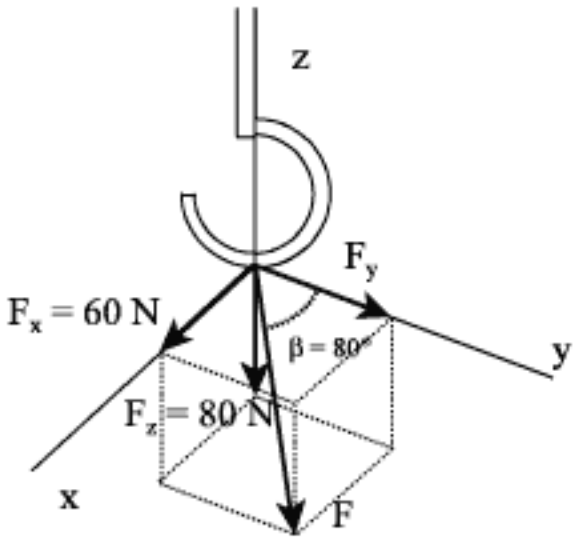
$$F_x = 60lb\cos[45°] = 42.4lb$$
$$F_y = 60lb\cos[60°] = 30lb$$
$$F_z = 60lb\cos[120°] = -30lb$$

Ödev-3

2–49. The hook is subjected to the cable force **F** which has a component along the x axis of $F_x = 60$ N, a component along the z axis of $F_z = -80$ N, and a coordinate direction angle of $\beta = 80°$. Determine the magnitude of **F.**



The hook is subjected to the cable force **F** which has a component along the x axis of $F_x = 60$ N, a component along the z axis of $F_z = -80$ N, and a coordinate direction angle of $\beta = 80°$. Determine the magnitude of **F**.



The component along the y axis is

$$F_y = F\cos[80°]:$$

The components must satisfy the relation:

$$F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2} = F^2$$

Thus:

$$(60\,N)^2 + (80\,N)^2 + \left(F\cos[80°]\right)^2 = F^2$$

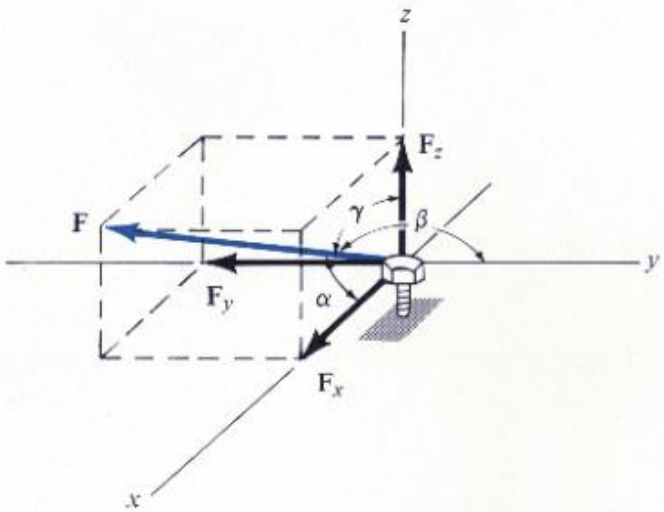
$$F^2\left(1 - \left(\cos[80°]\right)^2\right) = 10000\,N^2$$

$$F = \sqrt{\frac{10000\,N^2}{1 - \left(\cos[80°]\right)^2}}$$

$$\boxed{F = 1015\,N}$$

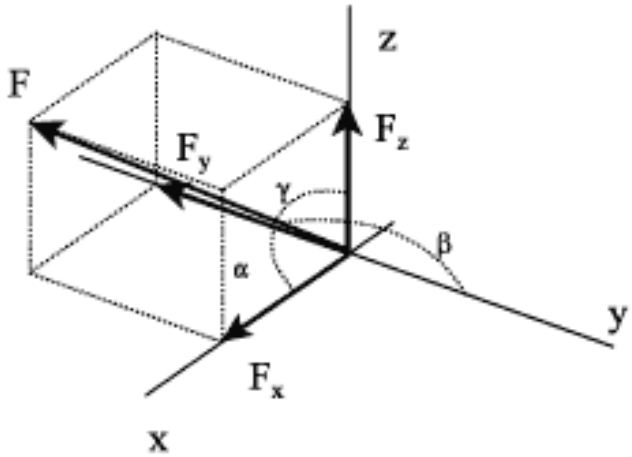
Ödev-4

2–50. The bolt is subjected to the force **F**, which has components acting along the x, y, z axes as shown. If the magnitude of **F** is 80 N, and $\alpha = 60°$ and $\gamma = 45°$, determine the magnitudes of its components.



Hibbeler 4th edition 2-50

The bolt is subjected to the force **F**, which has components acting along the x, y, z axes as shown. If the magnitude of **F** is 80 N, and $\alpha = 60°$ and $\gamma = 45°$, determine the magnitudes of its components.



Our first job is to determine the unknown coordinate direction angle β. The coordinate direction angles have the following property:

$$(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1$$

We can use this relation to find β

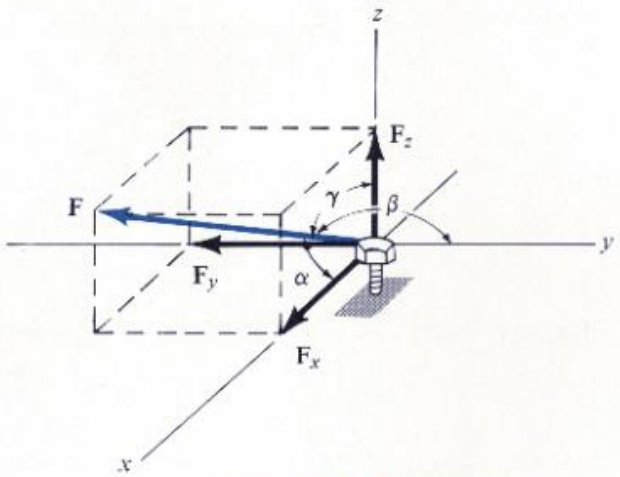
$$\cos\beta = \sqrt{1 - \cos^2[60°] - \cos^2[45°]} = 0.5 \qquad \text{Thus} \quad \beta = 60° \quad or \quad \beta = 120°$$

To keep the force in the correct quadrant we choose β = 120°.

The component magnitudes are:

$$F_x = 80\,N\cos[60°] = 40\,N$$
$$F_y = 80\,N\cos[120°] = -40\,N$$
$$F_z = 80\,N\cos[45°] = 56.6\,N$$

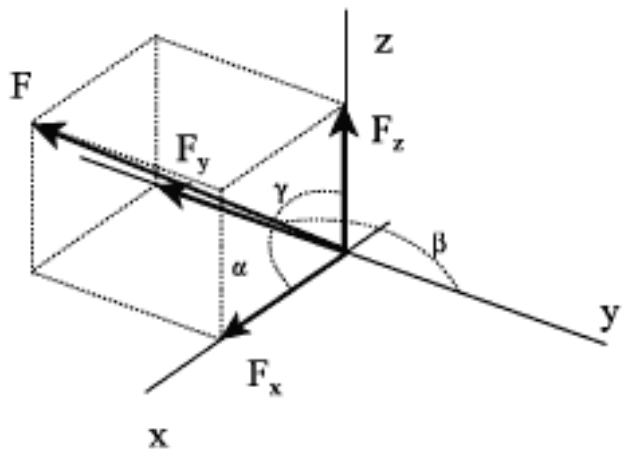
Ödev-5



Prob 2–51

2–51. The bolt is subjected to the force **F** which has components $F_x = 20$ N, $F_z = 20$ N. If $\beta = 120°$, determine the magnitudes of **F** and $\mathbf{F}_y$.

Hibbeler 4th edition 2-51



The bolt is subjected to the force **F**, which has components $F_x = 20$ N, $F_z = 20$ N. If $\beta = 120°$, determine the magnitudes of **F** and $\mathbf{F}_y$.

The component along the y axis is

$$F_y = F\cos[120°]:$$

The components must satisfy the relation:

$$F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 = F^2$$

Thus:

$$(20\,N)^2 + (20\,N)^2 + \left(F\cos[120°]\right)^2 = F^2$$

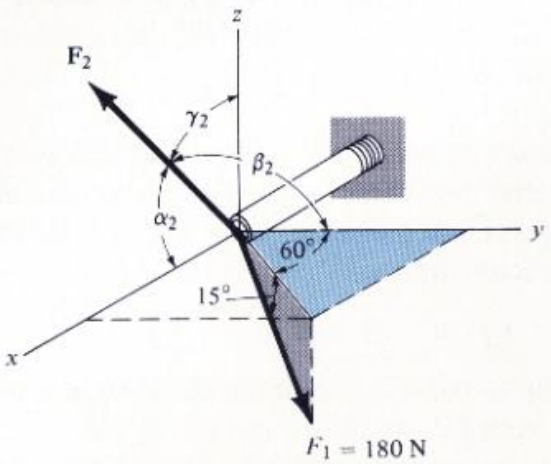
$$F^2\left(1 - \left(\cos[120°]\right)^2\right) = 800\,N^2$$

$$F = \sqrt{\frac{800\,N^2}{1 - \left(\cos[120°]\right)^2}}$$

$$F = 32.7\,N$$

$$F_y = \left|32.7\,N\cos[120°]\right| = 16.33\,N$$

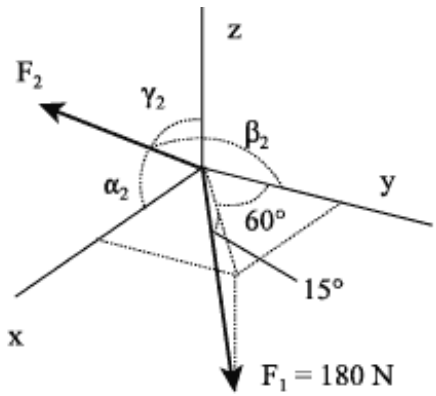
Ödev-6



Prob 2–53

2–53. Determine the magnitude and coordinate direction angles of $\mathbf{F}_2$ so that the resultant of the two forces is zero.

Determine the magnitude and coordinate direction angles of $\mathbf{F}_2$ so that the resultant of the two forces is zero.



Let's first find the components of each vector:

$$F_{1x} = 180\,N\cos[15°]\sin[60°] = 150.6\,N$$
$$F_{1y} = 180\,N\cos[15°]\cos[60°] = 86.9\,N$$
$$F_{1z} = -180\,N\sin[15°] = -46.6\,N$$

$$F_{2x} = F_2\cos\alpha_2$$
$$F_{2y} = F_2\cos\beta_2$$
$$F_{2z} = F_2\cos\gamma_2$$

To make the resultant have the desired form we need to impose the conditions:

$$\sum F_x: 150.6\,N + F_2\cos\alpha_2 = 0 \qquad F_2\cos\alpha_2 = -150.6\,N$$
$$\sum F_y: 86.9\,N + F_2\cos\beta_2 = 0 \quad \text{Thus} \quad F_2\cos\beta_2 = -86.9\,N$$
$$\sum F_z: -46.6\,N + F_2\cos\gamma_2 = 0 \qquad F_2\cos\gamma_2 = 46.6\,N$$

To find the magnitude we can square each term and add:

$$\boxed{F_2 = \sqrt{(-150.6\,N)^2 + (-86.9\,N)^2 + (46.6\,N)^2} = 180\,N}$$

The coordinate direction angles are

$$\cos\alpha_2 = \frac{-150.6\,N}{180\,N} = -0.837 \Rightarrow \alpha_2 = 146.8°$$
$$\cos\beta_2 = \frac{-86.9\,N}{180\,N} = -0.483 \Rightarrow \beta_2 = 118.9°$$
$$\cos\gamma_2 = \frac{46.6\,N}{180\,N} = 0.259 \Rightarrow \gamma_2 = 75°$$